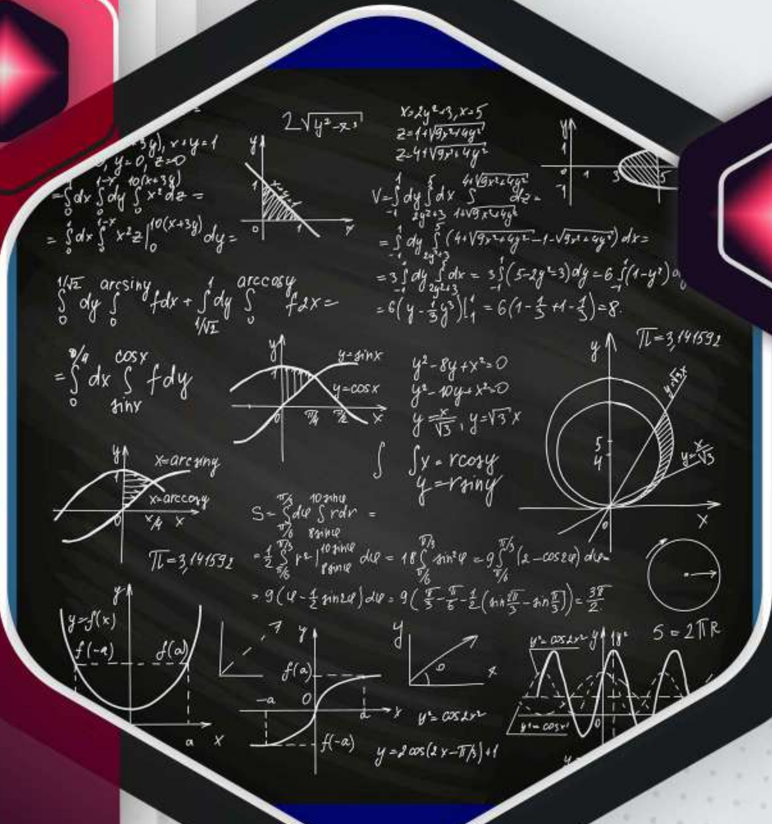
1era Ed.
2024

PUERTO MADERO
EDITORIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1



JOSÉ LUIS PÉREZ ROJAS
JUAN CARLOS SANTILLÁN LIMA
DIEGO IVÁN SANTILLÁN ESPINOZA

puertomaderoeditorial.com.ar
La Plata - Argentina

$$\int \int \int$$

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

ISBN: 978-631-6557-36-0

ISBN: 978-631-6557-36-0

PUERTO MADERO EDITORIAL

ANÁLISIS MATEMÁTICO 1

AUTORES:

José Luis Pérez Rojas
Juan Carlos Santillán Lima
Diego Iván Santillán Espinoza

ISBN: 978-631-6557-36-0

Pérez Rojas, José Luis
Análisis matemático 1 / José Luis Pérez Rojas ; Juan Carlos Santillán Lima ; Diego Iván Santillán Espinoza ; Editado por Raúl Marcelo Lozada Yánez. - 1a ed - La Plata : Puerto Madero Editorial Académica, 2024.
Libro digital, PDF/A

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-631-6557-36-0

1. Análisis Matemático. I. Santillán Lima, Juan Carlos II. Santillán Espinoza, Diego Iván III. Lozada Yanez, Raúl Marcelo, ed. IV. Título.
CDD 515.2

ISBN: 978-631-6557-36-0

Primera Edición, Agosto 2024

Análisis Matemático 1
ISBN: 978-631-6557-36-0

Editado por:
Sello editorial: ©Puerto Madero Editorial Académica
Nº de Alta: 933832

Editorial: © Puerto Madero Editorial Académica
CUIL: 20630333971
Calle 45 N491 entre 4 y 5
Dirección de Publicaciones Científicas Puerto Madero Editorial Académica
La Plata, Buenos Aires, Argentina
Teléfono: +54 9 221 314 5902
+54 9 221 531 5142
Código Postal: AR1900

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego (peer review)

Corrección y diseño:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: José Luis Santillán Lima

Diseño, Montaje y Producción Editorial:
Puerto Madero Editorial Académica
Diseñador Gráfico: Santillán Lima, José Luis

Director del equipo editorial: Lozada Yánez, Raúl Marcelo

Editor: Lozada Yánez, Raúl Marcelo

Hecho en Argentina
Made in Argentina

ISBN: 978-631-6557-36-0

ISBN: 978-631-6557-36-0

AUTORES:

José Luis Pérez Rojas

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Facultad de Mecánica, Escuela de Mecánica. Riobamba, Ecuador

jose.perezl@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-8958-5556

Juan Carlos Santillán Lima

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Informática y Electrónica, Carrera de Ingeniería en Tecnologías de la Información. Riobamba. Ecuador.

carlos.santillan01@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0001-5812-7766

Diego Iván Santillán-Espinoza

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo. Riobamba, Ecuador

ivan.santillan@espoch.edu.ec

https://orcid.org/0000-0002-4213-1936

.

ISBN: 978-631-6557-36-0

ISBN: 978-631-6557-36-0

Contenido

CAPÍTULO 1. TEMAS PRELIMINARES 5
1. FUNCIÓN 5
1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN 5
1.2 DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN 6
1.2.1 CASO 1: VARIABLE INDEPENDIENTE EN EL DENOMINADOR DE LA ECUACIÓN 7
1.2.2 CASO 2: VARIABLE INDEPENDIENTE SE ENCUENTRA DENTRO UNA RAIZ ENÉSIMA PAR 9
1.2.3 CASO 3: VARIABLE INDEPENDIENTE SE ENCUENTRA EN UN LOGARITMO 10
1.3 TIPOS DE FUNCIONES 11
1.3.1 EXPONENCIAL 11
1.3.2 POLINÓMIAL 11
1.3.3 CONSTANTE 12
1.3.4 LINEAL 13
1.3.5 CUADRÁTICA 14
1.3.6 CÚBICA 15
1.3.7 LOGARITMICA 15
1.3.8 VALOR ABSOLUTO 16
1.3.9 MÁXIMO ENTERO 17
1.4 ENTORNOS 19
1.4.1 ENTORNO REDUCIDO 19
1.4.2 REPRESENTACIÓN DE UN ENTORNO 20
1.4.3 ENTORNOS LATERALES 20
1.4.4 ENTORNO LATERAL DERECHO 21
1.4.5 ENTORNO LATERAL IZQUIERDO 21
1.4.6 EJEMPLOS DE ENTORNOS 21
CAPITULO 2 27
2. LIMITES Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN 27
1.1 DEFINICIÓN DE LÍMITE 30
2.1 CONCEPTO MATEMÁTICO DE LÍMITE 31
2.1.1 VERIFICACIÓN DE LA TEORÍA DEL LÍMITE 32
2.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES 33
2.3 FORMAS DE RESOLUCIÓN DE UN LÍMITE 34
2.3.1 LÍMITES RESUELTOS CON EVALUACIÓN DIRECTA 35
2.3.2 EJERCICIOS RESUELTOS CON LEVANTAMIENTO DE INDETERMINACIONES 37
2.4 EJERCICIOS PROPUESTOS 41
2.5 LÍMITES LATERALES 43
2.5.1 CONDICIÓN NECESARIA DE EXISTENCIA DEL LÍMITE 44
2.5.2 EJERCICIOS RESUELTOS DE LIMITES LATERALES 46
2.5.3 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LIMITES LATERALES 56

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.6 LÍMITES AL INFINITO _____ 58
2.6.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITES INFINITOS _____ 59
2.7 LÍMITES INFINITOS _____ 63
2.7.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITES INFINITOS _____ 64
2.7.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LIMITES AL INFINITO _____ 67
2.8 CONTINUIDAD EN UNA FUNCIÓN _____ 68
2.8.1 TIPOS DE DISCONTINUIDAD _____ 68
2.8.2 EJERCICIOS RESUELTOS DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN _____ 70
2.8.3 EJERCICIOS PLANTEADOS DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCION _____ 74
2.9 LÍMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO _____ 76
2.9.1 DEMOSTRACIÓN DEL LÍMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL _____ 76
2.9.2 RESOLUCION CON EL LÍMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO _____ 78
2.9.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS _____ 78
2.9.4 EJERCICIOS RESUELTOS DE LIMITES TRIGONOMETRICOS _____ 79
2.9.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LIMITES TRIGONOMETRICOS _____ 80
CAPITULO 3 _____ 91
3. LA DERIVADA _____ 91
3.1 DEFINICION DE LA DERIVADA _____ 91
3.2 INTERPRETACION FÌSICA Y GEOMETRICA DE LA DERIVADA _____ 91
3.3 TABLAS DE DERIVACION _____ 93
Tablas de derivación _____ 93
3.4 PROPIEDADES DE LA DERIVADA _____ 95
3.4.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADA DE TABLA _____ 95
3.4.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DRIVADAS DE TABLA _____ 97
3.5 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA CON EXPONENTE REAL CUALQUIERA. _____ 99
3.5.1 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA DE LA FORMA y= $\mathbf{xn}$ _____ 99
3.5.2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA DE LA FORMA y= $\mathbf{x-n}$ _____ 102
3.5.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA DE LA FORMA y= nxm _____ 103
3.5.4 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS CON UNA POTENCIA _____ 104
3.5.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DERIVADA CON UNA POTENCIA _____ 108
3.6 DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL SIMPLE Y COMPUESTA _____ 109
3.7 REGLA DE LA CADENA _____ 109
3.7.1 EJERCICIOS PROPUESTO DE DERIVADA CON LA REGLA DE LA CADENA _____ 113
3.8 DERIVADA DE LA FUNCIÓN Y=au _____ 115
3.9 DERIVADA DE LA FUNCIÓN Y=eu _____ 115
3.11.1 EJERCICIOS RESUELTOS _____ 119
3.12 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA _____ 123
3.12.1 DERIVADA DE LA FUNCIÓN y=f(x)=ln x _____ 124
3.12.2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN y=$\mathbf{log}ax$ _____ 125
3.12.3 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS CON LOGARITMOS _____ 128
3.12.4 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DERIVADAS CON LOGARITMOS _____ 129

3.14 DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS ____ 133
3.14.1 FUNCIÓN INVERSA DEL SENO: ARCO SENO ____ 133
3.14.2 LA FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO: ARCO COSENO ____ 134
3.14.3 FUNCIÓN INVERSA DE LA TANGENTE: ARCO TANGENTE ____ 135
3.14.4 FUNCIÓN INVERSA DE LA COTANGENTE: ARCO COTANGENTE ____ 136
3.14.5 FUNCIÓN INVERSA DE LA SECANTE: ARCO SECANTE ____ 136
3.14.6 FUNCIÓN INVERSA DE LA COSECANTE: ARCO COSECANTE ____ 137
3.14.7 REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS ____ 138

3.15 DERIVADA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS ____ 141
3.15.1 DERIVADA DEL SENO HIPERBÓLICO ____ 142
3.15.2 DERIVADA DE LA TANGENTE HIPERBÓLICA ____ 142
3.15.3 DERIVADA DE LA SECANTE HIPERBÓLICA ____ 143

3.16 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS ____ 145
3.16.1 DERIVADA DEL SENO HIPERBÓLICO INVERSO ____ 146
3.16.2 DERIVADA DEL COSENO HIPERBÓLICO INVERSO ____ 146
3.16.3 DERIVADA DE LA TANGENTE HIPERBÓLICA INVERSA ____ 146

3.17 DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES ____ 149

3.18 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS ____ 151

CAPITULO 4 ____ 160

4. INTEGRALES ____ 160

4.1 INTRODUCCION ____ 160

4.2 INTEGRALES INDEFINIDAS ____ 161
4.2.1 DEFINICION ____ 161
4.2.2 SUMATORIAS ____ 162
4.2.3 INTERPRETACIÒN DE LA INTEGRAL DEFINIDA ____ 164
4.2.4 TABLA DE INTEGRALES ____ 164
4.2.5 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES ____ 166
4.2.6 INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLE ____ 167
4.2.7 EJERCICIOS RESUELTOS POR CAMBIO DE VARIABLE ____ 168
4.2.8 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE ____ 173
4.2.9 INTEGRACIÓN POR PARTES ____ 173
4.2.10 INTEGRACIÓN QUE CONTIENEN UN CUADRADO ____ 177
4.2.11 INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES IRRACIONALES ____ 181
4.2.12 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES ____ 181
4.2.14 INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS ____ 183
4.2.15 INTEGRALES TRIGONOMETRICAS ____ 185
4.2.16 INTEGRALES POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA ____ 189
4.2.18 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRALES POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA ____ 194
4.2.19 INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES ____ 194
4.2.20 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES ____ 197

4.3 INTEGRALES DEFINIDAS ____ 199
4.3.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRALES DEFINIDAS ____ 200

4.4 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LIMITE INFINITO ____ 205

4.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LA INTEGRAL IMPROPIA ____ 209

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL IMPROPIA 210
4.7 EJERCICIOS RESUELTOS DE APLICACIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS 210
EJERCICIOS RESUELTOS DE APLICACIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS 213
4.8 EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS 213
4.9 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA 214
4.10 AREA DE LA REGIÒN PLANA 215
4.11 EJERCICIOS RESUELTOS DEL AREA DE LA REGION PLANA 215
4.12 EJERCICIOS PROPUESTOS DE ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA 222
4.13 ÁREA BAJO UNA CURVA 223
4.14 EJERCICIOS RESUELTOS DEL AREA BAJO LA CURVA 223
4.15 EJERCICIOS PROPUESTOS DE ÁREA BAJO LA CURVA 224
4.16 ÁREA ENTRE CURVAS 224
4.17 EJERCICIOS RESUELTOS DE AREA ENTRE CURVAS 225
4.18 EJERCICIOS PROPUESTOS DE ÁREA ENTRE CURVAS 234
4.19 CONSTRUCCIÓN DE SOLIDOS DE REVOLUCIÓN 235
4.20 EJERCICIOS RESUELTOS DE SOLIDOS DE REVOLUCIÓN 236
4.21 CALCULO DE VOLUMENES DE SOLIDOS DE REVOLUCION 242
4.22 METODO DE DISCOS 243
4.23 EJERCICIOS RESUELTOS POR METODOD DE DISCOS 244
4.25 METODO DE ARANDELAS 246
4.26 EJERCICIOS RESUELTOS DE METODO DE ARANDELAS 247
Bibliografía 250
DE LOS AUTORES 251
JOSÉ LUIS PÉREZ ROJAS 251
JUAN CARLOS SANTILLÁN LIMA 252
DIEGO IVÁN SANTILLÁN-ESPINOZA 253

ISBN: 978-631-6557-36-0

RESUMEN

La ingeniería es la ciencia capaz de transformar todos los pensamientos en cosas reales y tangibles, motivo por el cuál un estudiante de esta rama debe tener poseer cualidades, habilidades y destrezas. El análisis general de una función de una variable real es una asignatura fundamental en este campo debido a que permite entender el comportamiento de varios fenómenos cotidianos mediante ecuaciones y representaciones matemáticas.
La elaboración de este libro se da por la necesidad humana tanto de aprender, como la de enseñar, en el tema del análisis de funciones, también para la preparación correcta del lector y la resolución de cualquier duda de parte de cualquier persona ante un planteamiento relacionado con el tema.

Engineering is the science capable of transforming all thoughts into real and tangible things, which is why a student of this branch must have qualities, abilities, and skills. The general analysis of a function of a real variable is a fundamental subject in this field because it allows us to understand the behavior of various everyday phenomena through equations and mathematical representations, the preparation of this book is due to the human need to both learn and teach on the subject of function analysis, also for the correct preparation of the reader and the resolution of any doubt on the part of any person regarding a related approach with the topic.

ISBN: 978-631-6557-36-0

ISBN: 978-631-6557-36-0

INTRODUCCIÓN

El cálculo de una variable trata sobre los fundamentos del cálculo diferencial e integral para funciones de una variable. Incluye el estudio de límites, derivadas, integrales y sus diversas aplicaciones. El dominio de estas habilidades es indispensable en carreras de ingeniería, ciencias, economía y otras disciplinas.

El problema que aborda este libro es la dificultad que tienen muchos estudiantes para comprender los conceptos abstractos del cálculo de una variable y para aplicarlos en la resolución de problemas. Se requiere de un texto que presente el tema de manera clara, intuitiva y con abundantes ejemplos prácticos.

El objetivo general es proporcionar a los estudiantes universitarios un libro de cálculo de una variable que facilite la asimilación y aplicación de los conceptos a través de explicaciones visuales, analogías y ejercicios resueltos paso a paso.

Los objetivos específicos son:

- Explicar de forma intuitiva conceptos como límites, continuidad, derivadas e integrales.
- Ilustrar las definiciones y propiedades con gráficas y representaciones geométricas.
- Presentar ejemplos resueltos de aplicaciones del cálculo en problemas de tasas de cambio, optimización, áreas bajo curvas, etc.
- Incluye una amplia variedad de ejercicios graduados de menor a mayor complejidad.
- Vincular los contenidos con situaciones y problemas de la realidad.

La justificación de este trabajo reside en la relevancia del cálculo diferencial e integral para la formación en ciencias e ingeniería y en la necesidad de mejorar los recursos didácticos disponibles para su enseñanza efectiva. Una presentación clara e intuitiva permitirá a los estudiantes dominar estas herramientas analíticas fundamentales.

ISBN: 978-631-6557-36-0

El marco teórico se basa en los modernos enfoques educativos que enfatizan la construcción visual, inductiva y contextualizada del conocimiento matemático. Se adoptan los aportes de los autores sobre resolución de problemas y una perspectiva constructivista de aprendizaje activo.

En conclusión, este libro busca ser un pedagógico innovador para el aprendizaje del cálculo de una variable, con rigor conceptual y técnicas didácticas que faciliten la comprensión y destreza en su aplicación.

ISBN: 978-631-6557-36-0

CAPÍTULO 1. TEMAS PRELIMINARES

1. FUNCIÓN

Una función en matemática demuestra una relación entre dos variables (causa -efecto), estas relaciones representan diferentes fenómenos y situaciones reales presentes en la naturaleza, así como también en nuestra vida cotidiana. Por ejemplo, la cantidad de kilómetros por hora recorridos por un vehículo depende de la velocidad, el área de un cuadrado depende de la longitud de su lado y el costo de la producción de un artículo está en función al valor de los materiales utilizados. La primera magnitud es la variable independiente y a la segunda magnitud se la considera variable dependiente. En la figura 1 se evidencian diferentes tipos de funciones (Córdoba, 2011).

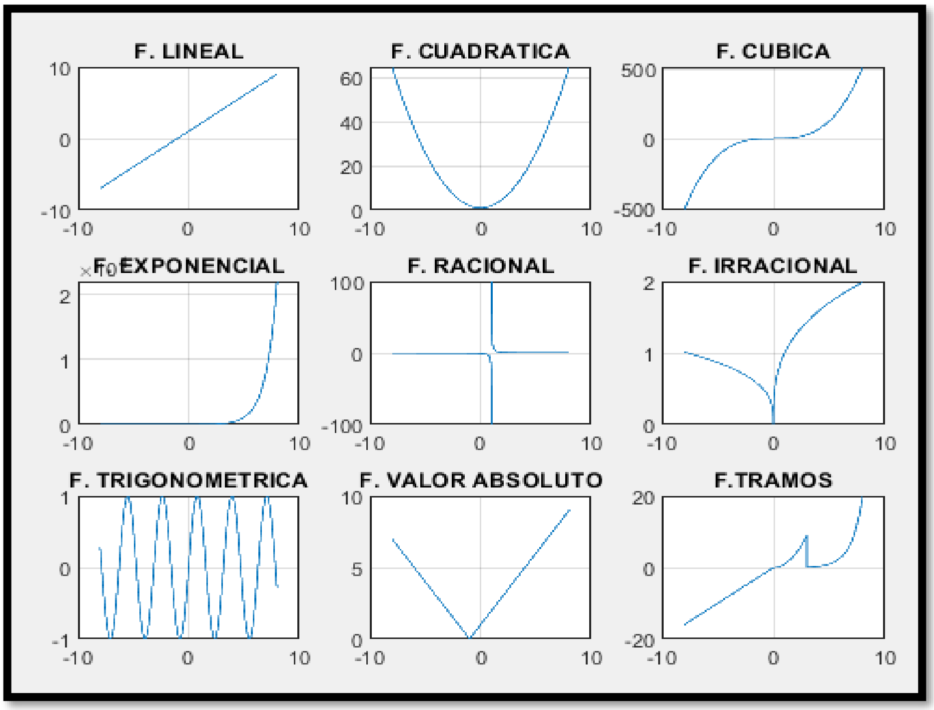


Figura. 1.1 Gráfica de funciones por tipo.

1.1 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Las ecuaciones dadas para determinar una **función** siempre tendrán dos incógnitas, en donde x será la variable independiente e y será la variable dependiente. Entonces, para obtener los puntos deben reemplazarse los valores de x en la función y resolver.

ISBN: 978-631-6557-36-0

Representar en el sistema cartesiano una función real f, donde:

$$f(x) = x + 1$$

Si se reemplazan los valores de x en la función: Se obtienen las coordenadas (1,2) (2,3) (3,4) (-1,0) (-2,-1), ver la figura 2. Estos son sólo algunos de los puntos que se pueden obtener reemplazando los valores en la función, pero al ser una función lineal bastara con dos puntos.

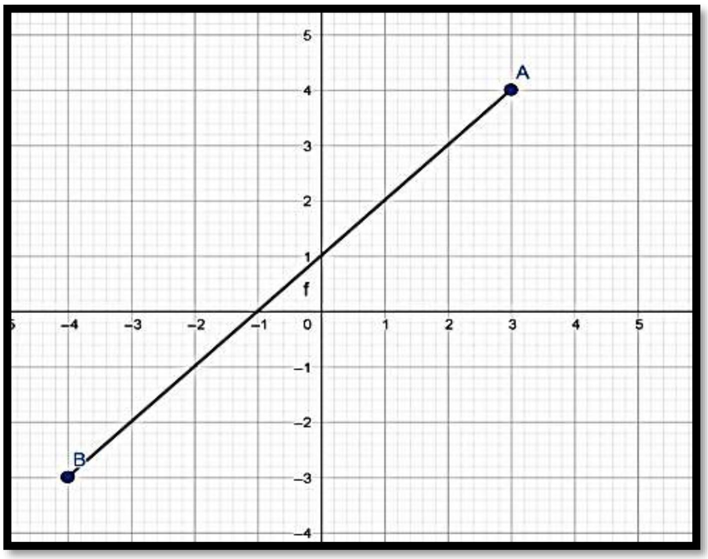


Figura. 1.2 Gráfica de la función f(x)=x+1

1.2 DOMINIO Y RECORRIDO DE UNA FUNCIÓN

Para encontrar el **dominio** y el **recorrido** a partir de la representación gráfica de una función, hay que observar la proyección de ésta sobre el eje de coordenadas. En función de esto diremos, que el dominio se expresa en eje de las abscisas (eje x), y el recorrido en el eje de las ordenadas (eje y), en donde la función es **continua** (Córdoba, 2011).

Ejemplo:

Dada la función, encontrar el dominio y el recorrido de la función a partir de su gráfica. Tal cual está la gráfica se puede observar que todos los valores de la variable independiente **x**, están entre – 3 y 3, y los valores que toma la variable independiente **y**

ISBN: 978-631-6557-36-0

son los números reales entre el 0 y 9. Sin embargo, al dar más valores de la variable independiente se puede evidenciar que la función puede expandirse hacia la derecha, hacia la izquierda y hacia arriba, entonces:

a) El dominio de la función es: Dom (f) = intervalo [-∞, ∞,]
b) El recorrido de la función: Rec (f) = intervalo [0, ∞,]

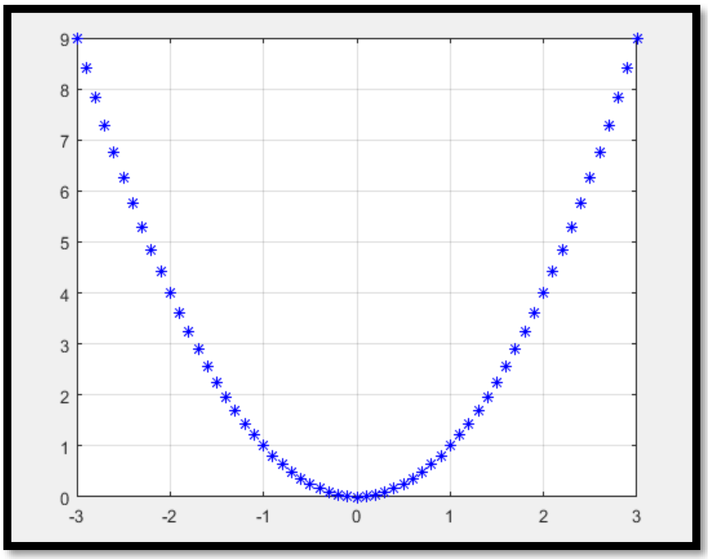


Figura. 1.3 Dominio y rango de una función

A partir de una representación algebraica se puede encontrar el dominio y recorrido de una función real, teniendo en cuenta los valores que pueden o no tomar las variables. Se debe considerar que los valores a ser reemplazados en la función no provoquen una indeterminación. En el caso de existir algún valor que provoque una indeterminación se excluirá del dominio de esta (Larson, & Edwards, 2010).

1.2.1 CASO 1: VARIABLE INDEPENDIENTE EN EL DENOMINADOR DE LA ECUACIÓN

Se deber recordar que en terminología matemática no existe una división para cero, de esta manera cuando alguna función presente una expresión racional, se debe analizar el denominador e igualar a cero, para excluirle del dominio de la función evitando que provoque una indeterminación (Granville, 2003).

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{2}{(x-3)}$$

Para determinar su dominio, se iguala a cero el denominador x – 3. El resultado será el valor que se excluye del dominio de la función.

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Se escribe matemáticamente:

$$Dom\ f = R - \{3\}$$

Ahora, para determinar el recorrido de una función, se despeja la variable independiente y se analizan los valores de la variable dependiente, evitando de la misma manera divisiones para cero. De existir algún valor que provoque una indeterminación se lo excluye del recorrido, como muestra el ejemplo a continuación (De Diego, 2015).

$$y = f(x) = \frac{2}{(x-3)}$$

$$x = \frac{2+3y}{y}$$

El recorrido de la función serían todos los números reales menos el 0.

$$Rec\ f = R - \{0\}$$

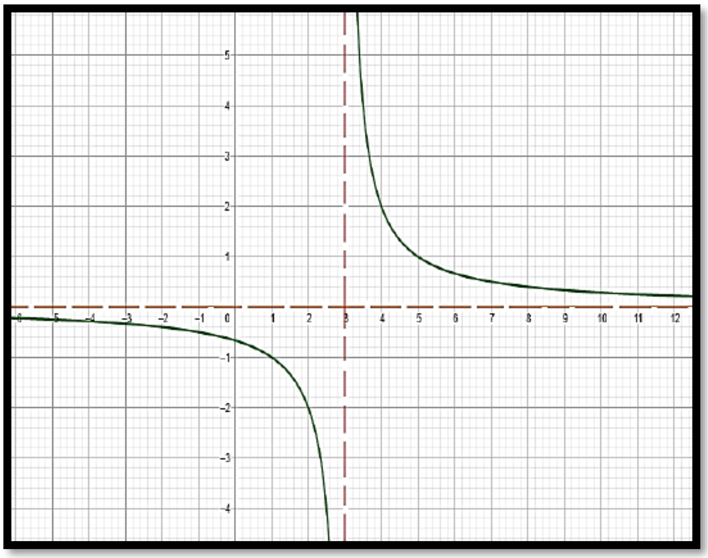


Figura. 1.4 Gráfica de la función caso I

ISBN: 978-631-6557-36-0

1.2.2 CASO 2: VARIABLE INDEPENDIENTE SE ENCUENTRA DENTRO UNA RAIZ ENÉSIMA PAR

Dentro del lenguaje de la matemática se debe recordar que no existe, o no está definida una raíz enésima par negativa. Para encontrar el dominio de la función se analizará la expresión dentro del radical, eliminando los valores que provoquen raíces menores que cero y se deberá excluirlas del conjunto de solución de valores del dominio de la función (Larson, & Edwards, 2010).

Ejemplo:

Determinar el dominio y recorrido de la función real:

$$h(x) = \sqrt{x-2}$$

Para determinar su dominio, se sabe que la cantidad sub radical tiene que ser mayor o igual a cero. Ver figura 1.5.

$$x - 2 \geq 0$$
$$x \geq 2$$

Entonces, el dominio para esta función son todos los números reales mayores o iguales a 2.

$$Dom\ h = [2; +\infty)$$

Como se detalló en el ejemplo anterior el proceso para la determinación del recorrido, se deja al lector la verificación del recorrido de la función h(x) el cual es:

$$Rec\ g\ [0; +\infty)$$

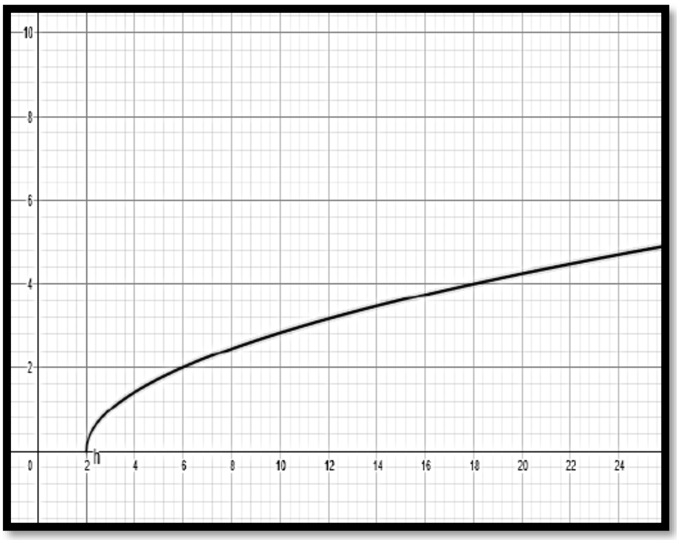


Figura. 1.5 Gráfica de la función caso 2

ISBN: 978-631-6557-36-0

1.2.3 CASO 3: VARIABLE INDEPENDIENTE SE ENCUENTRA EN UN LOGARITMO

La función logaritmo está definida de la forma:

$$f(x) = b$$

Para el siguiente caso, es necesario definir a **b** como un valor finito real, positivo y distinto de 1. Para encontrar el dominio, se debe recordar que los logaritmos no están definidos para los números negativos, de esta manera, se deberá considerar que los valores que tome la incógnita **x** deben hacer que la función sea mayor que cero. La determinación del recorrido es similar a los casos anteriores (De Diego, 2015).

Ejemplo:

$$h(x) = (x - 4)$$

Para determinar el dominio se sabe que $x -$ 4 tiene que ser mayor que 0 por lo tanto:

$$(x - 4) > 0$$

$$x > 4$$

Entonces x debe ser mayor que 4 para que la función sea real.

$$Dom\ h = (4; +\infty)$$

$$Rec\ h = (-\infty; +\infty)$$

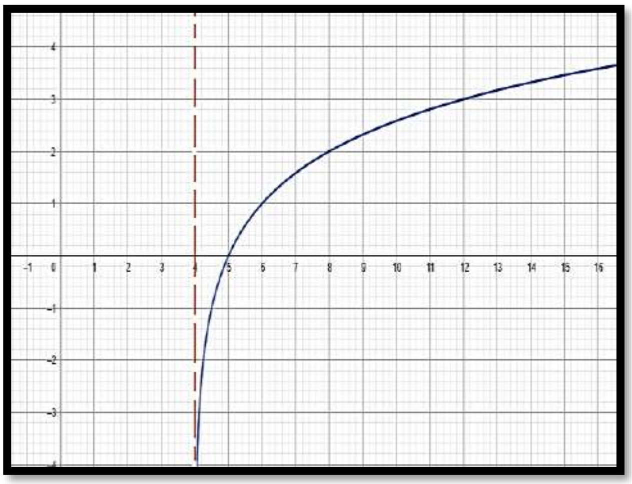


Figura. 1.6 Gráfica de la función caso 3

ISBN: 978-631-6557-36-0

1.3 TIPOS DE FUNCIONES

1.3.1 EXPONENCIAL

Es una función conformada por un valor finito constante (a) elevado a la variable independiente (x), es decir una función exponencial tendrá la siguiente nomenclatura (Larson, & Edwards, 2010).

$$y = a^x$$

Existen algunas particularidades en que presenta una función exponencial, entre las que mencionaremos:

a) Interseca en el punto A (0,1), cuando la base(a) es positiva.
b) Interseca en el punto A (0,-1), cuando la base(a) es negativa.
c) No interseca el eje x, debido a que este es una asíntota horizontal.
d) Su dominio lo constituye el conjunto de los números reales $y = a^x$, y es continua en todo su dominio.
e) El rango son todos los números reales mayores que 0, lo cual también se evidencia en la gráfica.
f) Si $a > 1$, la función exponencial es estrictamente creciente en su dominio.
g) Si a<1, la función exponencial es estrictamente decreciente en su dominio
h) Si la variable independiente (x) es positiva la función será creciente por la derecha.
i) Si la variable independiente (x) es negativa la función será creciente por la izquierda.

1.3.2 POLINÓMIAL

Recibe este nombre por su representación en de la forma.

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

En donde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$, son números reales conocidos como coeficientes del polinomio y n es el grado de este. Existen algunas particularidades en que presenta una función polinómica, entre las que mencionaremos:

ISBN: 978-631-6557-36-0

a) Intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son las raíces de la ecuación $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$
b) Las funciones polinómicas son funciones continuas.
c) En este grupo están incluidas las funciones constantes, las funciones lineales, las funciones cuadráticas, las funciones cúbicas, etc.
d) El dominio está a lo largo de R.
e) Son siempre continuas.
f) No poseen asíntotas.
g) La intersección con el eje x es en número como máximo el grado del polinomio (Bronceado, 2002).

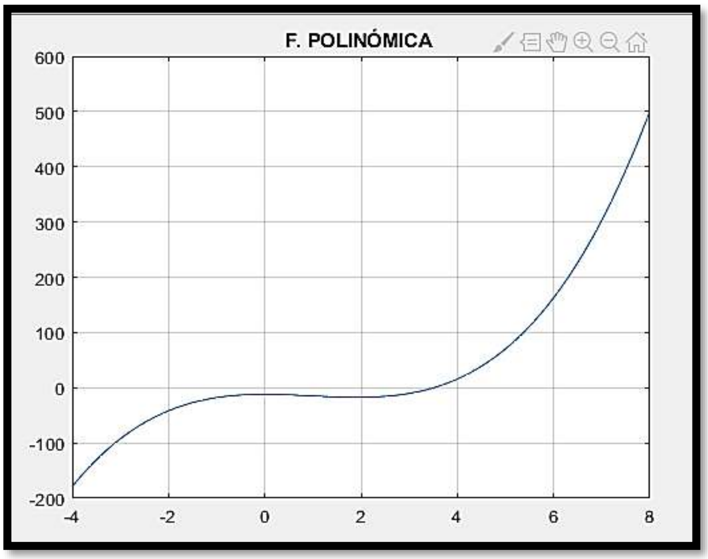


Figura. 1.7 Gráfica de una función polinómica

1.3.3 CONSTANTE

Se llama función polinómica de grado cero o función constante, en donde su representación en forma general es:

$$f(x) = k$$

En donde la k es un valor finito y la gráfica corresponde a una **recta horizontal** (paralela al eje de abscisas). La función corta el eje de ordenadas en un punto: (0, k) y sólo cortará

ISBN: 978-631-6557-36-0

al eje de abscisas cuando k=*0*, en este caso coincide con el eje y (Bronceado, 2002). Ver figura 1.8

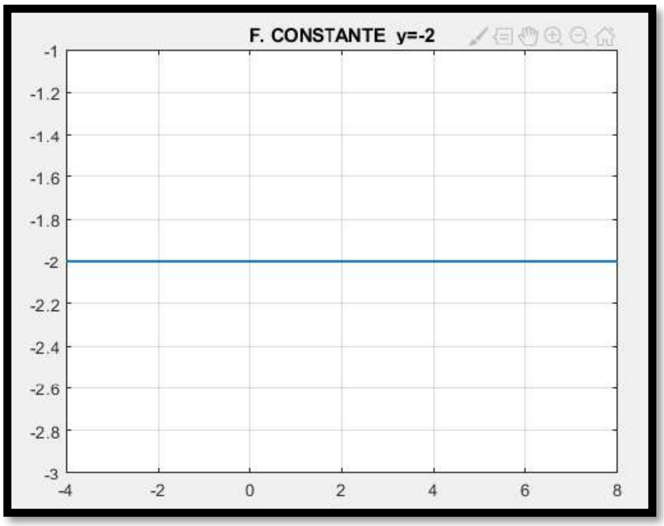


Figura. 1.8 Gráfica de una función constante.

1.3.4 LINEAL

Se llama función polinómica de grado uno o función lineal, en donde su representación en forma general es:

$$f(x) = mx + b$$

De la fórmula se detalla que m es la pendiente de la recta y b, el coeficiente de la ordenada en el origen. La representación gráfica de este tipo de función es una recta oblicua, es decir no es horizontal o vertical. Dependiendo el valor y el signo de la pendiente, la inclinación de la recta será hacia la izquierda o hacia la derecha (Bronceado, 2002).

La función lineal es continua a lo largo de R, el dominio y el recorrido es $]-\infty, -\infty[$. Ver figura 1.9.

ISBN: 978-631-6557-36-0

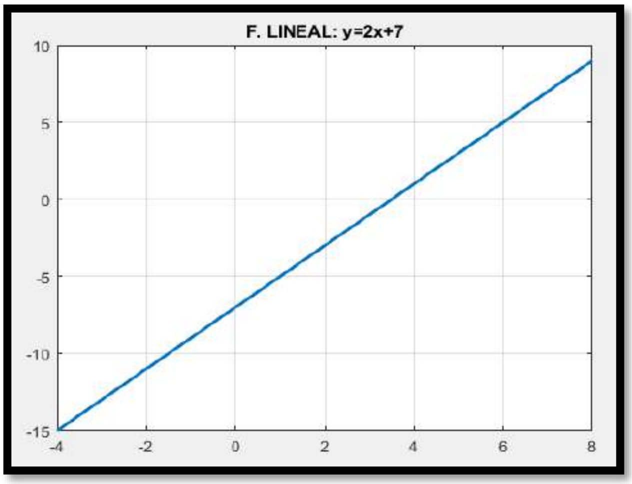


Figura. 1.9 Gráfica de una función lineal

1.3.5 CUADRÁTICA

Una función polinómica de grado 2 se la llama también **cuadrática** y tiene la forma general

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

a) La representación gráfica de esta función es una parábola que puede ser cóncava si a>0 y convexa si a<0.
b) Corta en el eje de las ordenadas en el punto (0, c).
c) Corta el eje de las abscisas, en un número de veces igual a las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

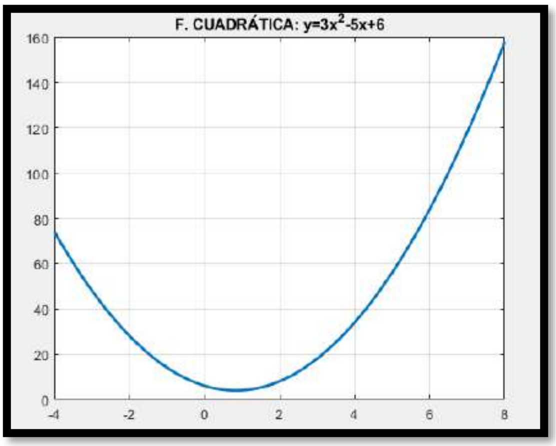


Figura. 1.10 Gráfica de una función cuadrática

ISBN: 978-631-6557-36-0

1.3.6 CÚBICA

A las funciones polinómicas de grado 3 se conoce como **función cúbica** y tiene la forma general.

$$\boldsymbol{f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d}$$

a) La intersección con el eje de las ordenadas es en el punto (0, d).
b) La intersección con el eje de las abscisas depende del número de raíces o soluciones reales que tenga la función.
c) Dominio todo R.
d) Recorrido todo R (Bronceado, 2002).

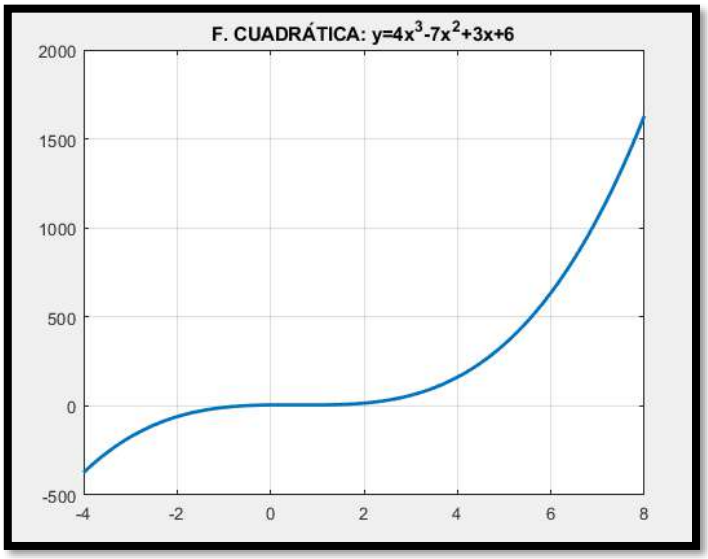


Figura. 1.11 Gráfica de una función cúbica

1.3.7 LOGARITMICA

Una función logarítmica convertida en base a una exponencial. Su representación matemática es:

$$y = x$$

En donde a es la base del logaritmo, transformada esta expresión a exponenciales sería:

$$a^y = x$$

a) Esta función existe solo para valores positivos de la variable independiente con le exclusión del cero.

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) En función a lo anterior el dominio es]-, +∞ [.

c) Las imágenes obtenidas de la aplicación de una función logarítmica corresponden a cualquier elemento del conjunto de los números reales, luego el recorrido de esta función es R (Kincaid, & Cheney, 2006).

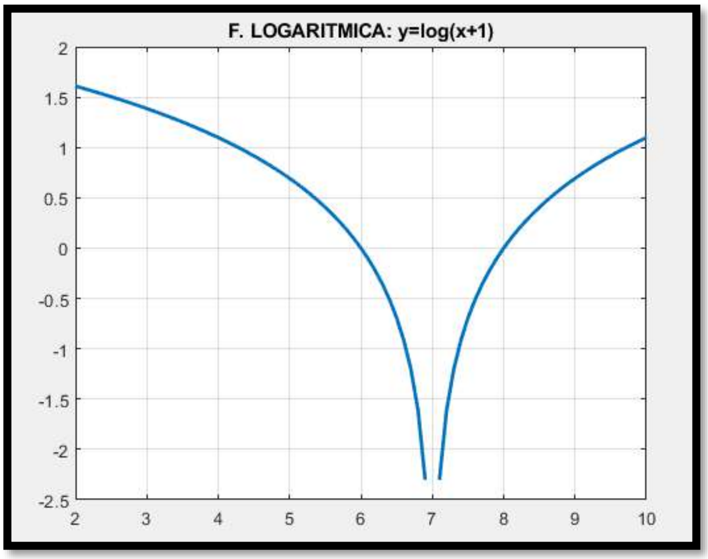


Figura. 1.12 Gráfica de una función logarítmica.

1.3.8 VALOR ABSOLUTO

La función de valor absoluto representada como:

$$y = |x|$$

$$y = |f(x)|\{ \quad f(x) \quad si \quad f(x) \geq 0 \;\; -f(x) \quad si \quad f(x) < 0$$

Hay que tener en cuenta que el valor absoluto de un número es la distancia desde dicho punto hasta el origen y al hablar de distancia entonces se deberá tomar en cuenta que el resultado siempre será positivo. Esta función tiene característica como:

a) Dominio es todos los números reales.

b) Rango es todos los números reales mayores o iguales a cero.

c) La gráfica se halla completamente por encima del eje x.

d) La gráfica es simétrica con relación al eje y (Kincaid, & Cheney, 2006).

ISBN: 978-631-6557-36-0

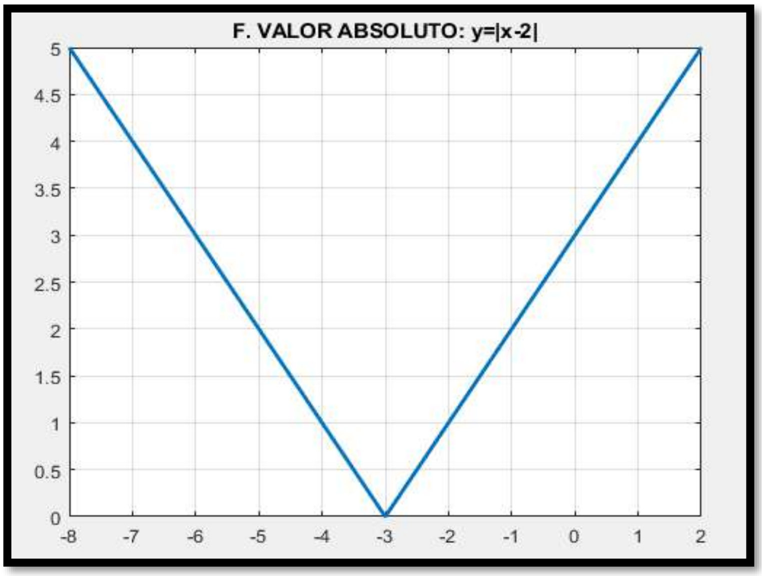


Figura. 1.13 Gráfica de una función valor absoluto

1.3.9 MÁXIMO ENTERO

Para representar una función máximo entero se utiliza la teoría de intervalos. El objetivo de una función de máximo entero es tomar el máximo valor entero que puede tomar un número. Teniendo en cuenta el conjunto de los números reales, la función máximo entero está representada por la expresión (Kincaid, & Cheney, 2006). Ver figura 15.

$$[x] = n$$

En donde: n es el mayor entero, menor o igual a x, es decir:

$$[x] = n \leftrightarrow [\,x] = \left[n \in \frac{Z}{n} \leq x \right]$$

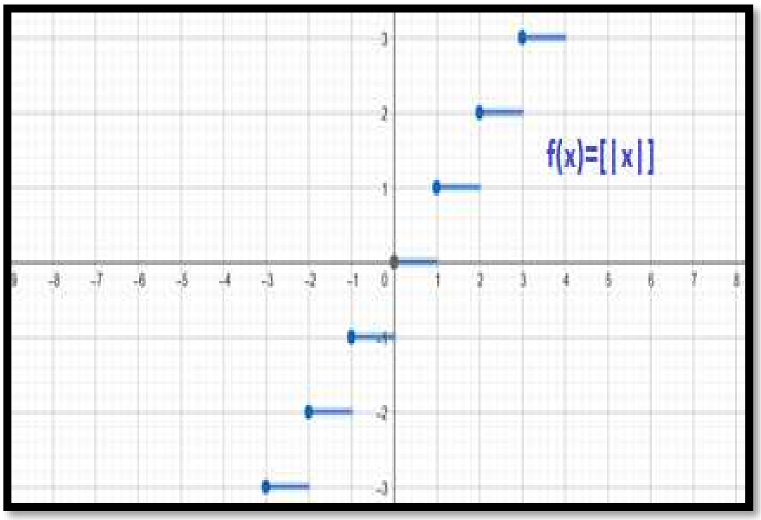


Figura. 1.14 Gráfica de la función máximo entero

ISBN: 978-631-6557-36-0

1.3.9.1 PROPIEDADES MÁS USUALES DEL MÁXIMO ENTERO

a) $[\![x]\!] \in Z$

b) $[\![x]\!] = x \leftrightarrow x \in Z$

c) $[\![x]\!] = n \leftrightarrow n \leq x < n + 1$

d) $[\![x + n]\!] = [\![x]\!] + n$

e) $[\![[\![x]\!]]\!] = [\![x]\!]$

f) $si[x] = n \leftrightarrow n \leq x < n + 1, n \in Z$

g) $si\ m \in Z \rightarrow [\![x + m]\!] = [\![x]\!] + m$

h) $\forall\ x\ \in R, [\![x]\!] + [\![-x]\!] = \{0, si\ x\ \in Z\ -1, si\ x\ \in (R - Z)\}$

i) $si\ [\![x]\!] \leq a \leftrightarrow x < a + 1, \forall\ a \in Z$

j) $si\ \forall\ x\ \in R, x - 1 < [\![x]\!] \leq x$

k) $\forall\ x, y\ \in R, [\![x]\!] + [\![y]\!] < [\![x + y]\!]$

Para determinar los diferentes subintervalos y poder graficar las funciones, es necesario utilizar la siguiente expresión.

$$\boldsymbol{[[x]] = n \leftrightarrow n < x < n + 1; n \in Z}$$

Ejemplo:

$\boldsymbol{f(x) = \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right]}$

Solución:

Si $\left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] = n \leftrightarrow n \leq \left[\!\left[\frac{x}{2}\right]\!\right] < n + 1 \leftrightarrow 2n \leq x < 2(n + 1), n \in Z.\}$

Entonces:

$$Dom(f) = \{[\![x]\!]x \in \langle 2n, 2(n + 1)\rangle, n\ \in Z\} = R$$

$$f(x) = \{-2, si - 4 \leq x < -2\ -1, si - 2 \leq x < 0\ 0, si\ 0 \leq x < 2\ 1, si\ 2 \leq x < 4\ 2, si\ 4 \leq x < 6\ \}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

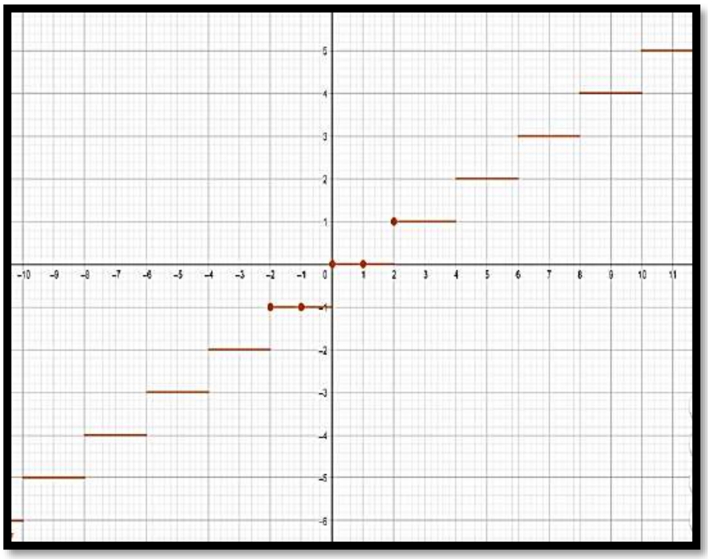


Figura. 1.15 Ejemplo de una función máximo entero

1.4 ENTORNOS

Un entorno se define como el conjunto de números reales que se encuentran dentro de un intervalo bajo la representación:

$$E(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)\rightarrow\left\{\frac{x}{x\epsilon R};\ a-\delta<x<a+\delta\right\}$$

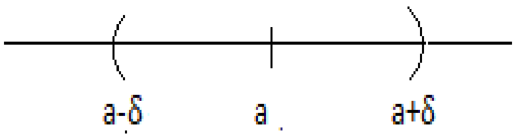


Figura. 1.16 Representación de un Entorno

En donde **a** es el centro y δ el radio o distancia desde el centro a los extremos derecho e izquierdo respectivamente. En función de lo anteriormente indicado se establece entonces que un entorno **a,** es la representación del conjunto de valores reales, cercanos para **x=a**, dicho de forma matemática un entorno es una representación de un conjunto de valores reales cuando **x** tiende al valor de **a**. $(x\rightarrow a)$ (Leithold, 1998).

1.4.1 ENTORNO REDUCIDO

En la mayoría de los casos $x\neq a$, debido a que la función no necesariamente existe en ese punto. Al no estar incluida a dentro del intervalo, el entorno se transforma en uno

ISBN: 978-631-6557-36-0

reducido de centro a y radio δ con la siguiente representación matemática (Leithold, 1998).

$$\left\{\frac{x}{x\epsilon R};\ a-\delta\ < x <\ a+\delta, x \neq a\right\}$$

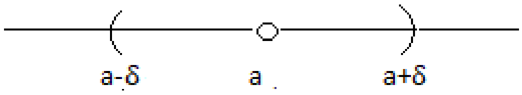


Figura. 1.17 Representación de un entorno reducido

1.4.2 REPRESENTACIÓN DE UN ENTORNO

La representación de un entorno es: $\boldsymbol{E}\ (\boldsymbol{a},\delta)$, en donde **a** es el centro y δ el radio; si el anhelo es representar un entorno reducid, esta sería su nomenclatura. $\boldsymbol{E}*(\boldsymbol{a},\delta)$. En algunas ocasiones es necesario realizar operaciones con los entornos por lo cual resulta adecuada la explicación del siguiente caso (Leithold, 1998).

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < \ \delta$$

La misma que es el resultado de la unión de los siguientes intervalos.

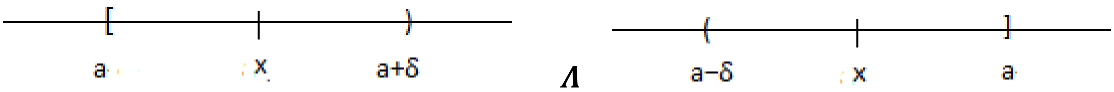


Figura. 1.18 Representación de un entorno

La expresión anterior que incluye un valor absoluto permite escribir en una sola expresión los valores de x que son mayores o iguales que a, así como también los valores menores.

$$\boldsymbol{0} < |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}| < \ \delta$$

1.4.3 ENTORNOS LATERALES

En ciertas ocasiones es necesario determinar el conjunto de valores que están a la derecha del centro (**a**) o a la izquierda de este, en virtud de esto es necesario definir los entornos laterales (Leithold, 1998).

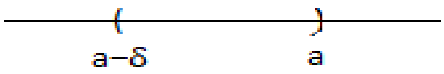
ISBN: 978-631-6557-36-0

1.4.4 ENTORNO LATERAL DERECHO

Si $\left\{\frac{x}{x\epsilon R};\ a < x <\ a+\delta.\right\} \Rightarrow E^{+}(a,\delta.)$

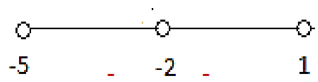
1.4.5 ENTORNO LATERAL IZQUIERDO

Si $\left\{\frac{x}{x\epsilon R};\ a-\delta. < x < a\right\} \Rightarrow\ E^{-}(a,\delta.)$

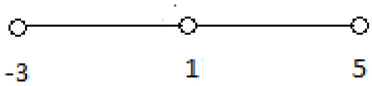


1.4.6 EJEMPLOS DE ENTORNOS

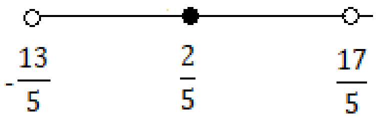
a) $E^{*}(-2,3) = E^{*}(-2,3) - \{-2\} \Rightarrow$



b) $E^{*}(1,4) = E^{*}(1,4) - \{1\} \Rightarrow$



c) $E\left(\frac{2}{5},3\right) = E\left(\left(\frac{2}{5},3\right)\right)$



$\Rightarrow$

d) **Dada una *f* una función** real cualquiera y x_o un elemento del dominio de esta ($x_o\epsilon\ Dom(f)$). Encontrar el entorno horizontal de centro x_o y de radio δ, tal que, la imagen de este sea incluida en el entorno vertical E ($f\,(x_o),\xi$), es decir que se cumpla:

$$f\big(E(x_0,\delta)\big) \subset\ E(f(x_0),\xi)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

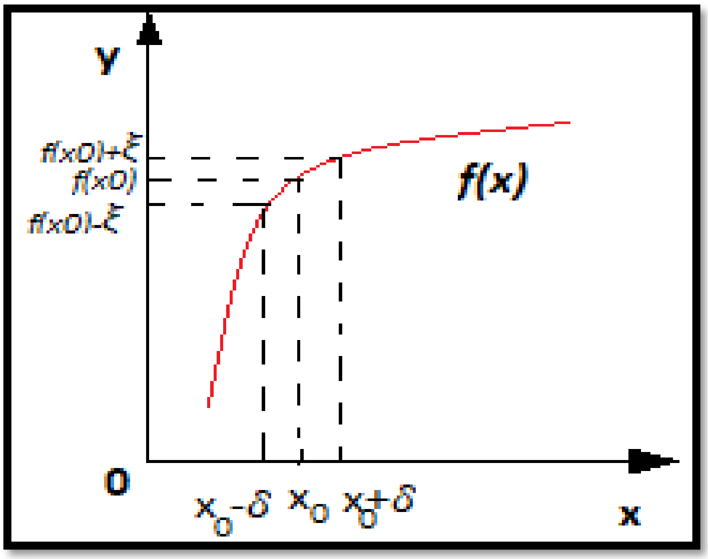


Figura. 1.19 verificación de un entorno

1. Dada una f una función real, definida por:

$$\boldsymbol{f(x) = 7 - 4x}$$

2. Hallar el entorno formado para diferentes valores de ξ que cumpla la ecuación $f\big(E(x_0, \delta)\big) \subset E(f(x_0), \xi)$.

   Si x_o=3, para valores de

$$\xi = \frac{1}{5}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}$$

   Con $\xi = \frac{1}{5}$

3. Se halla el valor de $f(x_o)$

$$f(x_o) = 7 - 4x$$

$$f(3) = 7 - 4(3)$$

$$f(3) = -5$$

4. Se calculan los valores para el entorno vertical.

$$f(x_o) + \xi = -5 + \frac{1}{5} = -\frac{24}{5}$$

$$f(x_o) - \xi = -5 - \frac{1}{5} = -\frac{26}{5}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

5. Cálculo de valores preliminares al radio con $f(x_1)$

$$f(x_1) = -\frac{24}{5}$$

$$7 - 4x_1 = -\frac{24}{5}$$

$$x_1 = \frac{59}{20}$$

En donde:

$$x_1 = \frac{59}{20} = (x_0 - \delta)$$

6. Cálculo de valores preliminares al radio con $f(x_2)$

$$f(x_2) = -\frac{26}{5}$$

$$7 - 4x_2 = -\frac{26}{5}$$

$$x_2 = \frac{61}{20}$$

En donde:

$$x_2 = \frac{61}{20} = (x_0 + \delta)$$

7. Cálculo del radio (δ)

$$|x_1 - x_0| = \left|\frac{59}{20} - 3\right| = \frac{1}{20}$$

$$|x_2 - x_0| = \left|\frac{61}{20} - 3\right| = \frac{1}{20}$$

8. Verificación

$$f(\mathrm{E}\ (x_o, \delta)) \subset \mathrm{E}(f(x_o), \xi)$$

$$f(\mathrm{E}\ (3, \tfrac{1}{20})) \subset \mathrm{E}\left(-5, \tfrac{1}{5}\right)\ )$$

Si $x \epsilon E\left(3, \frac{1}{20}\right)$ entonces el entorno horizontal sería:

$$\frac{x}{x \epsilon R};\ a - \delta\ < x <\ a + \delta$$

$$3 - \frac{1}{20} < x < 3 + \frac{1}{20}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{59}{20} < x < \frac{61}{20}$$

9. Reemplazar por los valores dados de la función para hallar el entorno vertical

$$(-4) * \frac{59}{20} < (-4) * x < (-4) * \frac{61}{20}$$

$$-\frac{59}{5} > -4x > -\frac{61}{5}$$

$$-\frac{61}{5} < -4x < -\frac{59}{5}$$

$$7 - \frac{61}{5} < 7 - 4x < 7 - \frac{59}{5}$$

$$-\frac{26}{5} < 7 - 4x < -\frac{24}{5}$$

Como

$f(x) = 7 - 4x$ entonces:

$$-\frac{26}{5} < \ f(x) < -\frac{24}{5}$$

10. Se forma el entorno vertical

$$-\frac{26}{5} + 5 < f(x) + 5 < -\frac{24}{5} + 5$$

$$-\frac{26}{5} + 5 < f(x) + 5 < -\frac{24}{5} + 5$$

$$-\frac{1}{5} < f(x) + 5 < \frac{1}{5}$$

11. En donde se verifica

$$f(x) \epsilon\, E\left(f(x_o), \frac{1}{5}\right) = E\left(f(3), \frac{1}{5}\right) = E\left(-5, \frac{1}{5}\right)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

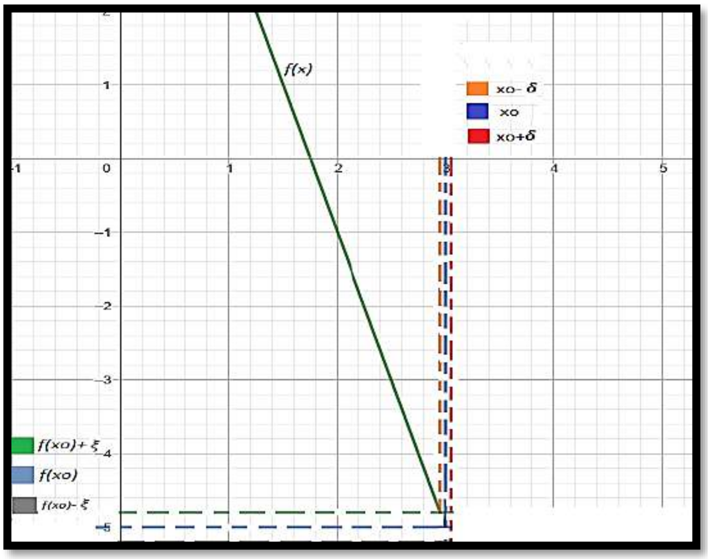


Figura. 1.20 Verificación gráfica de un entorno

ISBN: 978-631-6557-36-0

ISBN: 978-631-6557-36-0

CAPITULO 2

2. LIMITES Y CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

La matemática recibida hasta estos momentos se lo denomina precálculo, a partir de este tema ingresaremos al cálculo matemático, que inicialmente diremos que es el estudio de los límites. Antes de definir a ciencia cierta que es un límite pondremos algunos ejemplos prácticos y reales (Leithold, 1998).

a) Si un objeto se desplaza a lo largo de una trayectoria en un instante de tiempo t, se puede calcular su rapidez en cualquier intervalo de tiempo.

$$\boldsymbol{rapidez = \frac{distancia}{tiempo}}$$

Esta rapidez es considerada ‘’promedio’’, debido a que sin importar el tamaño del intervalo nunca se conocerá si la rapidez es constante. Ahora, si quisiéramos saber que tan rápido se mueve este objeto cuando t=2s, entonces hablamos de una rapidez instantánea, la misma que es el **límite** de la rapidez promedio cuando los intervalos cada vez se hacen más pequeños. Ver figura 2.1

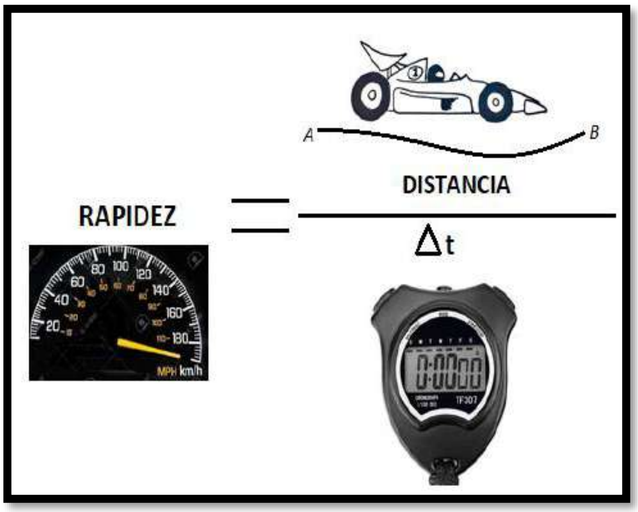


Figura. 2.1 Rapidez promedio

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Encontrar áreas de figuras geométricas por medio de fórmulas establecidas, resulta fácil, pero: ¿Se podrá calcular el área de regiones con fronteras curvas? Arquímedes fue capaz de encontrar la aproximación más cercana del área de un círculo, utilizando el área de un polígono de n lados. Es decir, el área del círculo es el límite de las áreas de los polígonos inscritos cuando el número de lados aumenta tanto como se quiera. Ver figura2.2

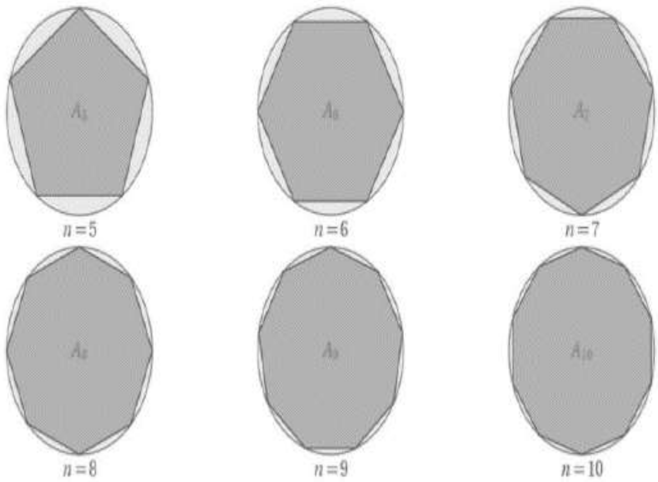


Figura. 2.2 Área de un polígono

e) Si una función es lineal, la longitud de la curva se encuentra de forma sencilla mediante la utilización de la fórmula de la distancia entre puntos. ¿Pero si la función es cuadrática, se podrá calcular la longitud con la misma sencillez? ¡¡La respuesta es no! Sin embargo, para encontrar la longitud se realiza una división de n segmentos de recta a lo largo de la curva para finalmente sumarlas. Entonces diremos que la longitud de una función cuadrática es el límite de la suma de las longitudes de n segmentos de recta. Ver figura 2.3

ISBN: 978-631-6557-36-0

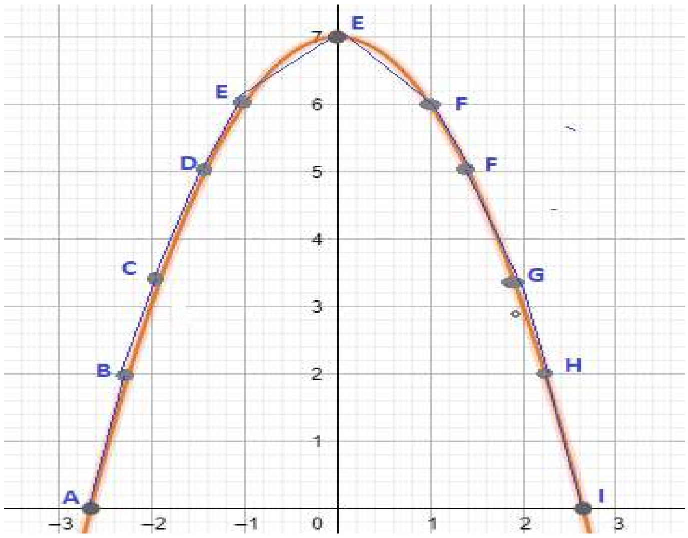


Figura. 2.3 Longitud de una curva

f) Dada la función $h(x)$, en el momento de dar valores de x para realizar su gráfica, se verifica que la función no está definida en $x = -1$. El motivo es por la presencia de una asíntota vertical. Entonces la pregunta que vendría a la mente del lector sería ¿cuánto es el valor de la imagen para $x = -1$?

$$\boldsymbol{h(x)} = \frac{\boldsymbol{x^2-1}}{\boldsymbol{x+1}}$$

Al dar valores lo más cercanos a -1 el valor de la imagen tiende hacia -2 que matemáticamente se lo representa de la siguiente manera.$= -2$

x	h(x)
-1,185	-2,185
-1,14	-2,14
-1,095	-2,095
-1,05	-2,05
-1	indefinido
-1,005	-2,005
-0,96	-1,96
-0,78	-1,78
-0,735	-1,735

Tabla 1 Valores cercanos al límite

ISBN: 978-631-6557-36-0

Dependiendo el comportamiento de una función, imaginemos el hecho de tener que realizar una tabla de valores para determinar el valor de la imagen de una función (polinómica, exponencial, máximo entero, valor absoluto, etc.), cuando la variable independiente tiende a cierto valor x_o (Marsden & Tromba, 2004).

A pesar de que se podría realizar tablas de valores para acercarnos lo máximo posible a un valor de x_o, esto representaría recursos. Sin embargo, con la utilización de operaciones y artificios matemáticos se podrá resolver el mismo problema de una manera más rápida. Por ejemplo, en la función h(x) se puede establecer el valor de la imagen cuando x tiende a -1 solamente mediante un proceso sencillo de factorización (Marsden & Tromba, 2004). Ver figura 2.4.

$$\boldsymbol{h(-1) = \rightarrow = -2}$$

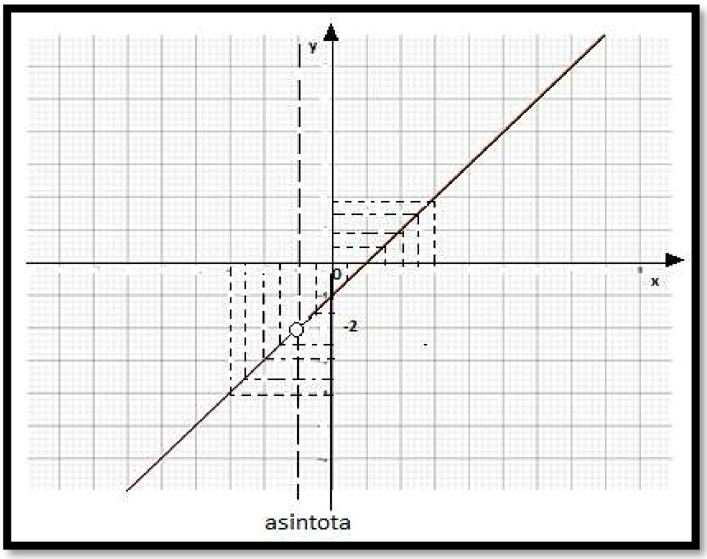


Figura. 2.4 Gráfica de una función con asíntota $x = -1$

1.1 DEFINICIÓN DE LÍMITE

Existen diferentes conceptos relacionados con los límites, analizaremos algunos de forma teórica y después se establecerá una definición con conceptos matemáticos(Marsden & Tromba, 2004).

a) Se entiende por límite a la línea que divide a dos entidades o territorios, la misma que puede ser real o imaginaria. Por ejemplo “Los Pirineos señalan el límite existente entre España y Francia”.

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Un límite "es el punto al cual algo, debe llegar a término o alcanzar su valor máximo". Por ejemplo: "El atleta ha llegado al límite de su velocidad"; "Este martes es la fecha límite de entrega", "El límite de velocidad en esta curva es 50km/h".

c) Se usa figurativamente la palabra límite, para indicar que algo ha ido más allá de lo necesario o de lo concebible, o para calificar una situación extrema que requiere atención urgente: "La corrupción en Ecuador ha superado el límite de nuestra imaginación", "Es hora de que alguien le ponga límites a su conducta", "El hambre en el mundo ha llegado a una situación límite".

2.1 CONCEPTO MATEMÁTICO DE LÍMITE

Frente a los conceptos mencionados en el apartado anterior, el concepto más cercano de un límite matemáticamente se detalla a continuación. Dada una función $h(x)$ el límite de esta, cuando x tiende a x_0 es L. Esta expresión implica entender que, para todo $\xi > 0$, existe algún $\delta > 0$. De tal manera que sí.

$$0 < |x - x_o| < \delta, \textbf{ entonces } |h(x) - L| < \xi$$

Siendo δ el incremento entre un punto y el siguiente a lo largo del eje de las abscisas, y ξ el incremento entre un punto y otro a lo largo del eje de las ordenadas. La representación matemática de un límite es:

$$= L$$

Para entender de mejor manera diremos que: "El límite de una $h(x)$, cuando el valor de x se acerca a $x_o, es\ L$. En función de esto, se formarán puntos en el plano, en el cual se evidencia que todo entorno horizontal, genera un entorno vertical (Stewart, 2008).

ISBN: 978-631-6557-36-0

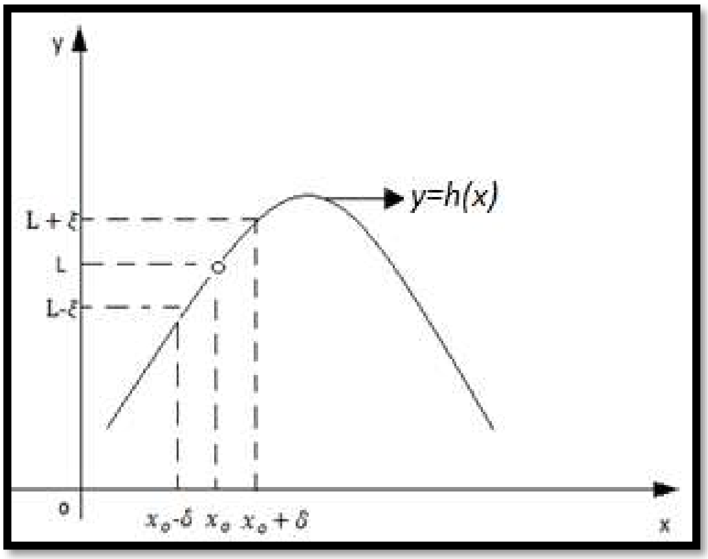


Figura. 2.5 Interpretación gráfica de un límite

2.1.1 VERIFICACIÓN DE LA TEORÍA DEL LÍMITE

Dada la siguiente función, encontrar el límite de la función cuando x_o, =2.

$$L = 12$$

Aplicando la fórmula se tiene: $x_o = 2, L = 12$

$$0 < |x - x_o| < \delta, \Rightarrow |h(x) - L| < \xi$$

$$0 < |x - 2| < \delta, \Rightarrow |7x - 2 - 12| < \xi$$

Tomando la segunda expresión:

$$|h(x) - L| < \xi$$

$$|7x - 2 - 12| < \xi \Rightarrow |7x - 14| < \xi \ \Rightarrow 7|x - 2| < \xi$$

Entonces de la primera expresión se tiene:

$$|x - 2| < \delta$$

Por lo tanto

$$|x - 2| < \frac{\xi}{7} = \delta \ \Rightarrow \ \xi > \ y \ \ \delta = \frac{\xi}{7}$$

La expresión final quedaría:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$0 < |x-2| < \delta{=}\frac{\xi}{7} \Rightarrow |f(x)-12| = 7|x-2| < \xi$$

Según la penúltima expresión $\delta = \frac{\xi}{7}$ en donde $\xi = 7\,\delta$, si esto reemplazamos en la última ecuación entonces:

$$|f(x)-12| = 7|x-2| < 7\left(\frac{\xi}{7}\right) = \xi$$

Demostrando que:

$$|h(x)-12| < \xi$$

2.2 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES

Sea $\boldsymbol{h(x)}$y $\boldsymbol{r(x)}$ funciones reales, h(x) $= L\,, r(x) = M$, $\boldsymbol{k}$ un valor constante y $\boldsymbol{c}$ el valor hacia donde tiene x se cumplen las siguientes propiedades (Stewart, 2008).

1. Si $f(x) = k, constante$ $\qquad \lim_{x\to a} f(x) = k$

$$Para\ \lim_{x\to a} f(x) = A\ \ y\ \ \lim_{x\to a} g(x) = B, tenemos:$$

2. $\lim_{x\to a} k \cdot f(x) = kA$
3. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = A \pm B$
4. $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = A \cdot B$
5. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{A}{B}$ $, cuando\ B \neq 0.$
6. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{A}, cuando\ \sqrt[n]{A}\ sea\ un\ numero\ real.$
7. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n = A^n$

Para limites infinitos

8. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\begin{cases} -\infty, cuando\ n\ es\ impar \\ +\infty, cuando\ n\ es\ par \end{cases}$$

9. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} =$

$Para\ limites\ de\ tipo\ trigonometrico\ fundamental$

10. $\lim_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{1}}{\mathbf{co\,s}(\boldsymbol{x})} = 1$

11. $\lim_{x\to 0} \frac{\boldsymbol{sen}(\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{x}} = 1$

12. $\lim_{x\to 0} \mathbf{co\,s}(\boldsymbol{x}) = 1$

$Para\ limites\ de\ tipo\ algebraico\ fundamental$

13. $\lim_{x\to \infty} (\ \mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}})^{\boldsymbol{x}} = e$

14. $\lim_{y\to 0} (\ \mathbf{1} + \boldsymbol{y})^{\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y}}} = e$

2.3 FORMAS DE RESOLUCIÓN DE UN LÍMITE

La resolución de un límite es más sencilla de lo que parece, ver figura 26. En donde se necesita que el lector sepa manejar correctamente teoría matemática aprendida en cursos o niveles anteriores al cálculo matemático 1. Los temas que se requieren conocer muy bien son:

a) Racionalización.
b) Potenciación.
c) Operaciones básicas de fracciones heterogéneas y homogéneas.
d) Propiedades de logaritmos y exponenciales.
e) Funciones e Identidades trigonométricas.

ISBN: 978-631-6557-36-0

f) Funciones e Identidades hiperbólicas.

g) Todos los casos de factorización.

El siguiente diagrama de flujo indica cuales son los pasos en la resolución de un límite.

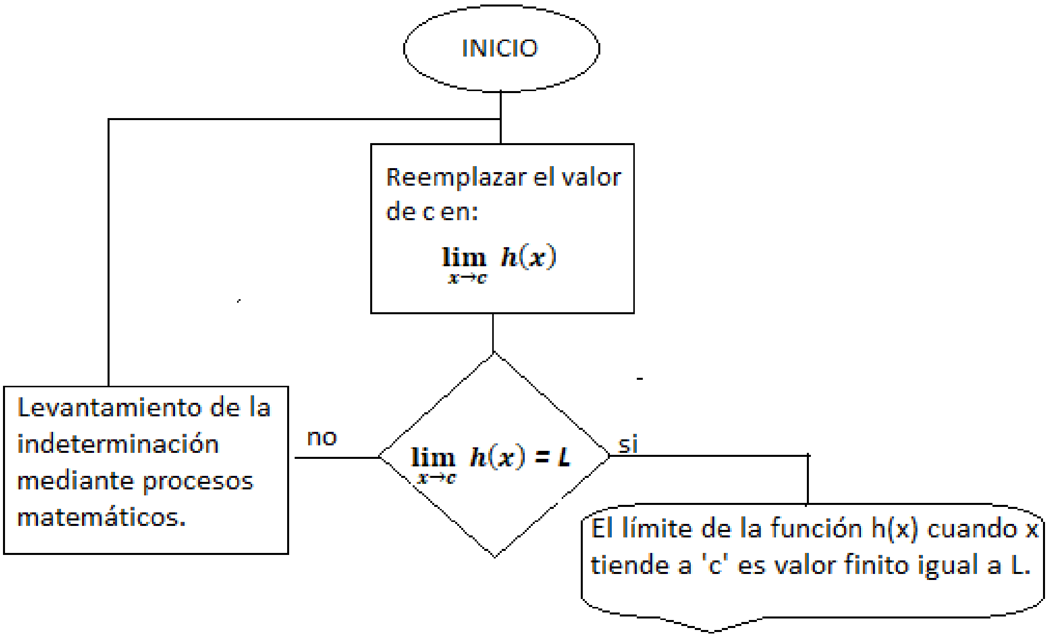


Figura. 2.6 Pasos para la solución de un límite

Es necesario indicar que en el primer paso del algoritmo durante la evaluación del límite se presentarán algunas rápidas a considerar.

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

d) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

2.3.1 LÍMITES RESUELTOS CON EVALUACIÓN DIRECTA

a) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3+3x^2+6x+12}{x+2}}$ Problema planteado

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2)^3+3(2)^2+6(2)+12}{2+2}$$

Evaluar el límite en x=2

$$\lim_{x\to 2}\frac{8+12+12+12}{2+2}=\frac{44}{4}=11$$

Solución

b) $\boldsymbol{\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}+2}}$

Problema planteado

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{16}-4}{\sqrt[4]{16}+2}$$

Evaluar el límite en x=16

$$\lim_{x\to 16}\frac{4-4}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

Solución

c) $\boldsymbol{\lim_{x\to 4}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x+2}}}$

Problema planteado

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{4}{2}\right)^{\frac{1}{4+2}}$$

Evaluar el límite en x=4

$$\lim_{x\to 4}2^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{2}$$

Solución

d) $\boldsymbol{\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}}(sen\theta+cos\,cos\,\theta)}$

Problema planteado

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}}\left(sen\frac{\pi}{6}+cos\,cos\,\frac{\pi}{6}\right)$$

Evaluar el límite en $\theta=\frac{\pi}{6}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Solución

e) $\boldsymbol{\lim_{\beta\to\frac{\pi}{3}}\frac{sen\beta-coscos\,\beta}{tan\beta+\sqrt{3}}}$

Problema planteado

$$\lim_{\beta\to\frac{\pi}{3}}\frac{sen\frac{\pi}{3}-cos\,cos\,\frac{\pi}{3}}{tan\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}$$

Evaluar el límite en $\beta=\frac{\pi}{3}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{\beta \to \frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{3}}$$ Solución

2.3.2 EJERCICIOS RESUELTOS CON LEVANTAMIENTO DE INDETERMINACIONES

Los ejercicios resueltos en la sección anterior ocurren en casos excepcionales, la mayor parte de problemas en cálculo matemático incluyen indeterminaciones de diferentes tipos $\left[\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 1^{\infty}, etc\right]$, los mismos que son el resultado de las composiciones de funciones presentes en el límite a resolver. Estos tipos de indeterminaciones son levantados mediante procesos matemáticos conocidos por el lector.

A continuación, se resolverán algunos problemas detallando de forma resumida el paso a paso de cómo se obtuvo su solución.

a) $\boldsymbol{\lim_{h \to t} \frac{h^2 - (t+1)h + t}{x^3 - t^3}}$

Problema planteado

$$\lim_{h \to t} \frac{t^2 - (t+1)t + t}{t^3 - t^3}$$

Evaluación del límite en h=t

$$\lim_{h \to t} \frac{t^2 - t^2 - t + t}{t^3 - t^3} = \frac{0}{0}$$

Levantamiento de indeterminación

$$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uso de la formula general

$$h_{1,2} = \frac{(t+1) \pm \sqrt{(t+1)^2 - 4t(1)}}{2}$$

Sustituyendo de valores

$$h_{1,2} = \frac{(t+1) \pm \sqrt{(t-1)^2}}{2}$$

Simplificación de términos del radical

$$h_{1,2} = \frac{(t+1) \pm (t-1)}{2}$$

Eliminación de la raíz y potencia cuadradas

$$h_1 = \frac{(t+1)+(t-1)}{2}; \; h_2 = \frac{(t+1)-(t-1)}{2}$$

Se separan las dos raíces

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$h_1 = \frac{t+1+t-1}{2} = \frac{2t}{2} = t$$

Solución para h1

$$h_2 = \frac{t+1-t+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Solución para h2

b) $\lim\limits_{h \to 1} \frac{h^3+h^2-5h+3}{h^3+2h^2-7h+4}$

Problema planteado

$$\frac{1^3+1^2-5(1)+3}{1^3+2(1)^2-7(1)+4} = \frac{0}{0}$$

Evaluación del límite en h=1

$$\lim_{h \to 1} \frac{(h-1)(h+3)(h-1)}{(h-1)(h+4)(h-1)}$$

Levantamiento de indeterminación (Factorización)

$$\lim_{h \to 1} \frac{(h+3)}{(h+4)} = \frac{(1+3)}{(1+4)} = \frac{4}{5}$$

Solución

c) $\lim\limits_{h \to 1} \frac{h^{100}-2h+1}{h^{50}-2h+1}$

Problema planteado

$$\frac{1^{100}-2(1)+1}{1^{50}-2(1)+1} = \frac{0}{0}$$

Evaluación del límite en h=1

$$\lim_{h \to 1} \frac{(h-1)(h^{99}+h^{98}+h^{97}+\cdots+h-1)}{(h-1)(h+h^{48}+h^{47}+\cdots+h-1)}$$

Levantamiento de indeterminación (Factorización)

$$\lim_{h \to 1} \frac{(1^{99}+1^{98}+1^{97}+\cdots+1-1)}{(1+1^{48}+1^{47}+\cdots+1-1)}$$

Eliminación de términos semejantes y evaluación del límite en h=1

$$\lim_{h \to 1} \frac{1+1+1 \ldots + 1 - 1}{1+1+1 \ldots + 1 - 1} = \frac{98}{49} = \frac{49}{24}$$

Solución

ISBN: 978-631-6557-36-0

d) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+h^2-1}}{h^2}$ — Problema planteado

$$\frac{\sqrt{1+0^2-1}}{0^2}=\frac{0}{0}$$

Evaluación del límite en h=0

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{1+h^2}-1}{h^2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{1+h^2}+1}{\sqrt{1+h^2}+1}\right)$$

Levantamiento de indeterminación (racionalización)

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+h^2}\right)^2+\sqrt{1+h^2}-\sqrt{1+h^2}-1}{(h^2)\left(\sqrt{1+h^2}+1\right)}$$

Producto de cocientes

$$\lim_{h\to 0}\frac{1+h^2-1}{(h^2)\left(\sqrt{1+h^2}+1\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{(h^2)\left(\sqrt{1+h^2}+1\right)}$$

Eliminación de términos semejantes

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{1\left(\sqrt{1+0^2}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

Solución

e) $\lim\limits_{h\to 8}\frac{\sqrt[3]{h}-2}{h-8}$

Problema planteado

$$\frac{\sqrt[3]{8}-2}{8-8}=\frac{0}{0}$$

Evaluación del límite para h=8

$$\lim_{h\to 8}\frac{\sqrt[3]{h}-2}{h-8}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{h^2}+2\sqrt[3]{h}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{h^2}+2\sqrt[3]{h}+4\right)}$$

Levantamiento de indeterminación (racionalización)

$$\lim_{h\to 8}\frac{(h-8)}{(h-8)\left(\sqrt[3]{h^2}+2\sqrt[3]{h}+4\right)}$$

Producto de cocientes y eliminación de términos semejantes

$$\lim_{h\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{h^2}+2\sqrt[3]{h}+4\right)}$$

Eliminación de términos en común

$$\lim_{h\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4\right)}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

Solución

f) $\lim\limits_{h\to 1}\left(\frac{1}{1-h}-\frac{3}{1-h^3}\right)$ — Problema planteado

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{1}{1-1}-\frac{3}{1-1^3}\right)=\frac{-2}{0}$$

Evaluación del límite en h=1

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{1}{1-h}-\frac{3}{(1-h)(1+h+h^2)}\right)$$

Levantamiento de indeterminación

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{(1+h+h^2)-3}{(1-h)(1+h+h^2)}\right)$$

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{h^2+h-2}{(1-h)(1+h+h^2)}\right)$$ Eliminación de términos en común

$$\lim_{h\to 1}\left(\frac{-(1-h)(h+2)}{(1-h)(1+h+h^2)}\right)$$

$$\lim_{h\to 1}\frac{-(h+2)}{(1+h+h^2)}=\frac{-3}{3}=-1$$ Solución

g) $\boldsymbol{\lim_{h\to 1}\frac{\sqrt[8]{h}-1}{\sqrt[5]{h}-1}}$

Problema planteado

$$\lim_{h\to 1}\frac{\sqrt[8]{1}-1}{\sqrt[5]{1}-1}=\frac{0}{0}$$ Evaluación del límite en h=1

$$\lim_{h\to 1}\frac{\sqrt[8]{1}-1}{\sqrt[5]{1}-1}=\frac{0}{0}$$ Levantamiento de indeterminación (racionalización)

$$\lim_{h\to 1}\frac{(h-1)}{(h-1)}\cdot\left(\frac{\sqrt[8]{h^7}+\sqrt[8]{h^6}+\sqrt[8]{h^5}+\sqrt[8]{h^4}+\sqrt[8]{h^3}+\sqrt[8]{h^2}+\sqrt[8]{h}+1}{\sqrt[8]{h^7}+\sqrt[8]{h^6}+\sqrt[8]{h^5}+\sqrt[8]{h^4}+\sqrt[8]{h^3}+\sqrt[8]{h^2}+\sqrt[8]{h}+1}\right)$$
$$\cdot\left(\frac{\sqrt[5]{h^5}+\sqrt[5]{h^4}+\sqrt[5]{h^3}+\sqrt[5]{h^2}+\sqrt[5]{h}+1}{\sqrt[5]{h^5}+\sqrt[5]{h^4}+\sqrt[5]{h^3}+\sqrt[5]{h^2}+\sqrt[5]{h}+1}\right)$$ Eliminación de términos en común

$$\lim_{h\to 1}\frac{\sqrt[5]{h^5}+\sqrt[5]{h^4}+\sqrt[5]{h^3}+\sqrt[5]{h^2}+\sqrt[5]{h}+1}{\sqrt[8]{h^7}+\sqrt[8]{h^6}+\sqrt[8]{h^5}+\sqrt[8]{h^4}+\sqrt[8]{h^3}+\sqrt[8]{h^2}+\sqrt[8]{h}+1}$$ Evaluación del límite en h=1

$$\lim_{h\to 1}\frac{\sqrt[5]{h^5}+\sqrt[5]{h^4}+\sqrt[5]{h^3}+\sqrt[5]{h^2}+\sqrt[5]{h}+1}{\sqrt[8]{h^7}+\sqrt[8]{h^6}+\sqrt[8]{h^5}+\sqrt[8]{h^4}+\sqrt[8]{h^3}+\sqrt[8]{h^2}+\sqrt[8]{h}+1}=\frac{5}{8}$$ Solución

ISBN: 978-631-6557-36-0

h) $\lim\limits_{h\to 2} \frac{1-\sqrt{2h-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2h-3}}}$

Problema planteado

$$\lim_{h\to 2}\frac{1-\sqrt{2h-3}}{2-\sqrt[3]{9-\sqrt{2h-3}}}=\frac{0}{0}$$

Evaluación del límite en h=2

$t=\sqrt{2h-3}$

Con $h=2\to t=1$

Cambio de variable

$$\lim_{t\to 1}\frac{1-t}{2-\sqrt[3]{9-t}}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{(1-t)}{\left(2-\sqrt[3]{9-t}\right)}*\frac{\left(2^2+2\sqrt[3]{9-t}+\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^2\right)}{\left(2^2+2\sqrt[3]{9-t}+\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^2\right)}$$

Levantamiento de indeterminación (racionalización)

$$\lim_{t\to 1}\frac{(1-t).\left(4+2\sqrt[3]{9-t}+\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^2\right)}{2^3-\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^3}$$

Eliminación de términos en común

$$=\lim_{t\to 1}\frac{(1-t).\left(4+2\sqrt[3]{9-t}+\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^2\right)}{8-(9-t)}$$

$$\lim_{t\to 1}\frac{(1-t).\left(4+2\sqrt[3]{9-t}+\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^2\right)}{-(1-t)}$$

$$lim -_{t\to 1}\left(4+2\sqrt[3]{9-t}+\left(\sqrt[3]{9-t}\right)^2\right)$$

Solución

$$lim_{t\to 1}\left(4+2\sqrt[3]{9-1}+\left(\sqrt[3]{9-1}\right)^2\right)=-12$$

2.4 EJERCICIOS PROPUESTOS

- **Resuelva los siguientes límites por evaluación directa**

a) $\lim\limits_{x\to 1} \quad x+\frac{1}{2}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$

c) $\lim\limits_{x \to 3} x + 4 - \frac{3}{x}$

d) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{3} + \sqrt{x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+3}{x^8-3}$

f) $\lim\limits_{x \to 1} (x^2 + 3x - 1)^2$

g) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{(x-2)^2}{x-2}$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{x} * \frac{x}{3} + 2$

i) $\lim\limits_{x \to 0} 2x^8 + 3x^7 + 4x^6 - 5x^5 - 6x^4 + 7x^3 + 8x^2 - \frac{3}{4}x + 7$

j) $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} x^2 - \frac{3}{x} + 2$

k) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 + x + 3$

l) $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-(5+1)x+5}{x^3-5^3}$

m) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2-(-2+1)x+(-2)}{x^3-(-2)^3}$

n) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2}$

- **Resuelva los siguientes límites con levantamiento de indeterminaciones**

1) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2-16}{x-4}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2-x-1}{x^2-x-2}$

3) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2+2x-4}{x^2-3x-2}$

4) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-x-2}$

5) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2+4x+4}{x^2-4x}$

6) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^2+4x+3}{x^2-4x}$

7) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-6}{x^2-7x+6}$

8) $\lim\limits_{x \to -3} \frac{2x^2+6}{4x^2-36}$

9) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^3-2x}{x^2-8}$

10) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^3-1}{1-x}$

11) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{2x^2-2}{x^2-x-2}$

12) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2-4}{2x^2-13x+20}$

13) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{2x^2-9}{5x^2-23x+24}$

14) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^3+2}{4x^2-x-14}$

15) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-4}{3x^2-17x+20}$

16) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2-2x+6}{4x^2-11x+6}$

17) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{2x^2+3x+4}{8x^2-19x+15}$

18) $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2-9}{9-x}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

19) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-9}{81-x}$

20) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3x^3-4}{x-64}$

21) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-3}{13x^2-6x+15}$

22) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3-4x}{x^2-2x}$

23) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2x^2-x-9}{x^2-x-3}$

24) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-25}{x^2-4x-3}$

25) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^2-1}{2x^2-x-1}$

26) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{6x^2-11x+21}{x^2-7x+4}$

27) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{2x^2-5x+14}{3x^2-2x-1}$

28) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{3x^2+3}{x^2-2x-9}$

29) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^3-64}{x^2-2x-8}$

30) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{2x^2+4x+21}{x^2-9}$

31) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2-2x+1}$

32) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2-x-2}{2x^2-3x}$

33) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-7x+3}$

34) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^3-1}{x^2-6x+9}$

35) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-2x+1}{x^3+2x^2-4x+2}$

36) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{50}-2x+1}{x^{25}-2x+1}$

37) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

38) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

39) $\lim\limits_{x\to 16} \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt[4]{x}-2}$

40) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

41) $\lim\limits_{x\to 25} \frac{x^2-\sqrt{x}-x-595}{x-25}$

42) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x}-x+2\sqrt[3]{2x}-\sqrt{8}}{x-4}$

43) $\lim\limits_{t\to 2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{2+t}-\sqrt{3}}}{t-2}$

44) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x}-6}{x^2-4x+3}$

45) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x+7}-\sqrt{8}}$

46) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt{x^2+1}}{x^2}$

47) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x\sqrt[3]{x^2-1}-6}{3-x}$

48) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x-1}+4\sqrt[11]{x-1}-\sqrt[13]{x-1}+4}{\sqrt[3]{x-1}-5\sqrt[5]{x-1}+\sqrt[7]{x-1}-3}$

49) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x-1}$

50) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{(x-1)^2-x^2}{x^2-1}$

51) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{\sqrt[3]{5-x}-\sqrt[3]{3+x}}{x}$

52) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^4-16}{x+3}$

53) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x-4}{\sqrt[5]{x+5}-3}$

54) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-1}{xr^2-3xr+1}$

2.5 LÍMITES LATERALES

En las funciones a trozos es necesario determinar cuál es el valor de la imagen L, cuando la variable independiente tiende hacia cierto valor Xo, de forma similar a las funciones anteriores. Sin embargo, estas funciones también llamadas a intervalos tienen la particularidad de poseer diferentes valores de la imagen **L,** cuando la variable independiente tiende a cierto valor por la izquierda (Xo^-), o por la derecha (Xo^+) (Stewart, 2008).

$$\boldsymbol{h(x) = \begin{cases} x^2-3 & si\ \ x \le 2 \\ 2x-1 & si\ \ x > 2 \end{cases}}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

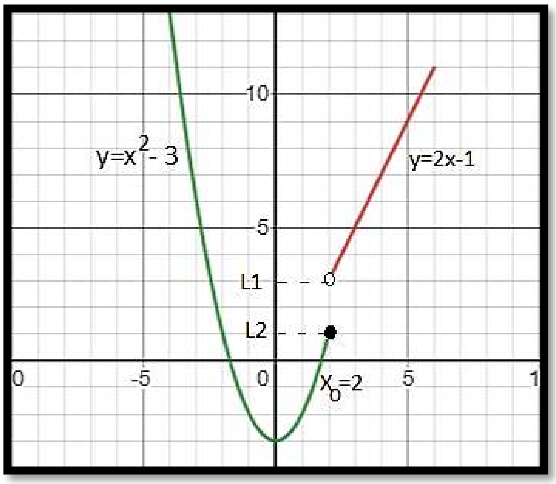


Figura. 2.7 Gráfica de una función a tramos

En este tipo de funciones los valores de análisis de Xo, se los conoce como puntos de conflicto en donde será necesario determinar si la función es o no continua por la presencia de las conocidas asíntotas. Esta continuidad se estudiará en las próximas secciones (Stewart, 2008).

En este punto es necesario recordar parte de la teoría de intervalos y sus diferentes representaciones matemáticas y en el plano. Ver figura 27

Intervalo abierto:

a) Signos matemáticos o representación de inecuaciones ($<,>$).
b) Signos de agrupación ( ) ,] [.
c) Representación en el plano (o).

Intervalo cerrado:

a) Signos matemáticos o representación de inecuaciones ($\leq$; $\geq$)
b) Signos de agrupación [ ]
c) Representación en el plano (●)

2.5.1 CONDICIÓN NECESARIA DE EXISTENCIA DEL LÍMITE

Para determinar cuál es el comportamiento de una función cuando la variable la variable independiente dentro del plano tiende a cierto valor, se debe determinar que existe el límite de la función cuando este se acerca a Xo. Además, si en una función presenta puntos de conflicto o discontinuidad es necesario verificar que (Fleming, & Varberg, 1992):

$$\boldsymbol{h(x_0) = L1}$$

$$\boldsymbol{h(x_0) = L2}$$

$$\boldsymbol{si\ L1 = L2 \rightarrow h(x_0) = \exists}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

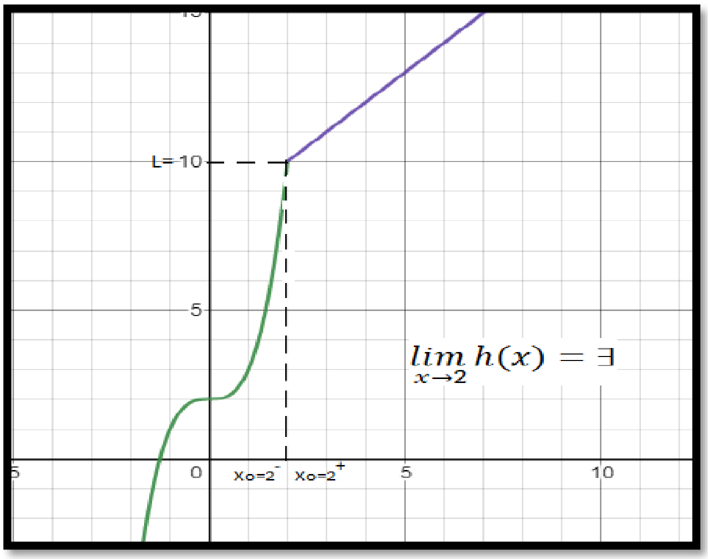


Figura. 2.8 Condición de existencia de un límite

La última representación indica claramente que, el comportamiento de una función $h(x)$ cuando esta tiende a un valor de **a** es **L** siempre y cuando los limites laterales (izquierdo y derecho) sean iguales y existan; bajo otro caso el límite de la función en este punto no existe. Ver figura 29

$$\boldsymbol{h(x_0) = L}$$

$$\boldsymbol{h(x_0) = L1 h(x_0) = L2 \rightarrow L1 \neq L2 \rightarrow h(x_0) = \nexists}$$

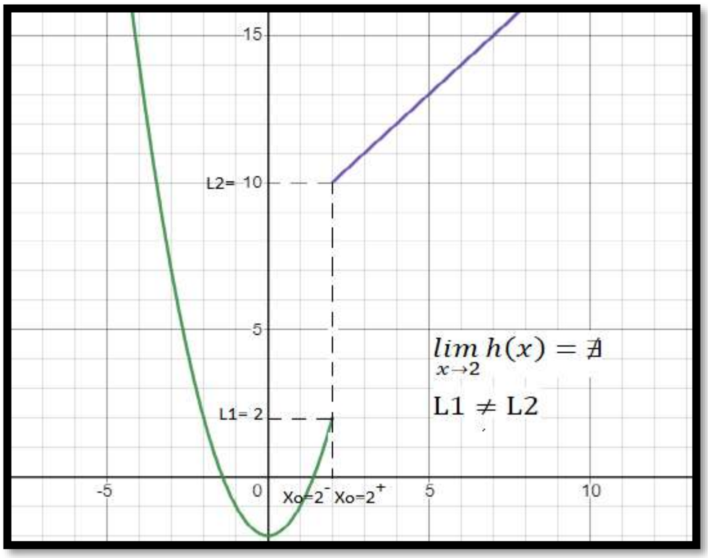


Figura. 2.9 Condición de no existencia de un límite

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.5.2 EJERCICIOS RESUELTOS DE LIMITES LATERALES

a) Dada la siguiente función determinar si existe el límite en x=1 y x=4

$$\boldsymbol{h(x) = \{x^2, si\ x < 1\ x, si\ 1 < x < 4\ 4 - x, si\ x > 4}$$

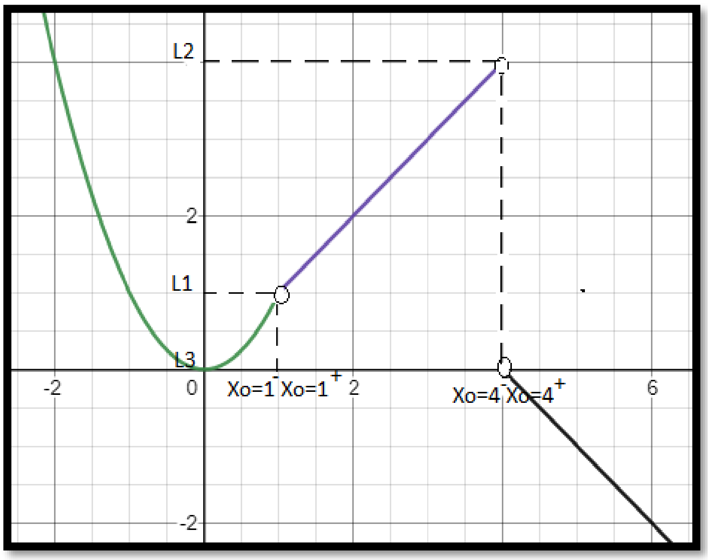


Figura. 2.10 Gráfica de la 1° función con limites laterales

$\boldsymbol{lim_{\ x\to 1} h(x)}$	Determinación del límite en x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 = L1$	Evaluación del límite por la izquierda
$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x = 1 = L2$	Evaluación del límite por la derecha
$L1 = L2 = 1$	El límite existe
$lim_{\ x\to 4} h(x)$	Determinación del límite en x=4
$\lim\limits_{x\to 4^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 4^-} x = 4 = L1$	Evaluación cuando se acerca a 4 por la izquierda
$\lim\limits_{x\to 4^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 4^+} 4 - x = 0 = L2$	Evaluación cuando se acerca a 4 por la derecha
$L1 \neq L2$	El límite no existe

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Dada la siguiente función determinar si existe el límite en el punto de conflicto.

$$\boldsymbol{h(x)\{-1 \quad si\ x < 0\ 0 \quad si\ \ x = 0\ 1 \quad si\ x > \ 0}$$

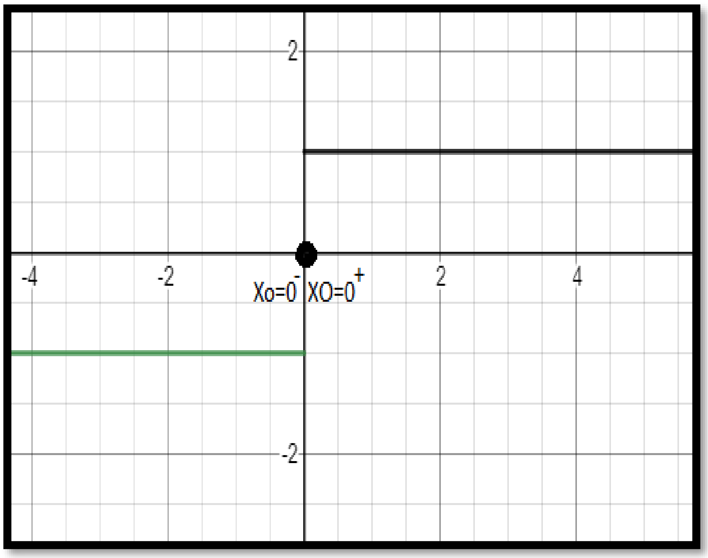


Figura. 2.11 Gráfica de la 2° función con limites laterales

$\lim\limits_{x\to 0} h(x)$	Determinación del límite en x=1
$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = -1 = L1$	Evaluación de la función por la izquierda
$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = 1 = L2$	Evaluación de la función por la derecha
$L1 \neq L2$	Como el límite por la izquierda y el límite por la derecha son diferentes (no existe)

c) Calcular si existe el límite en X=5 dada la siguiente función.

$$\boldsymbol{h(x) = \{\frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, x \geq 5\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}, x < 5}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

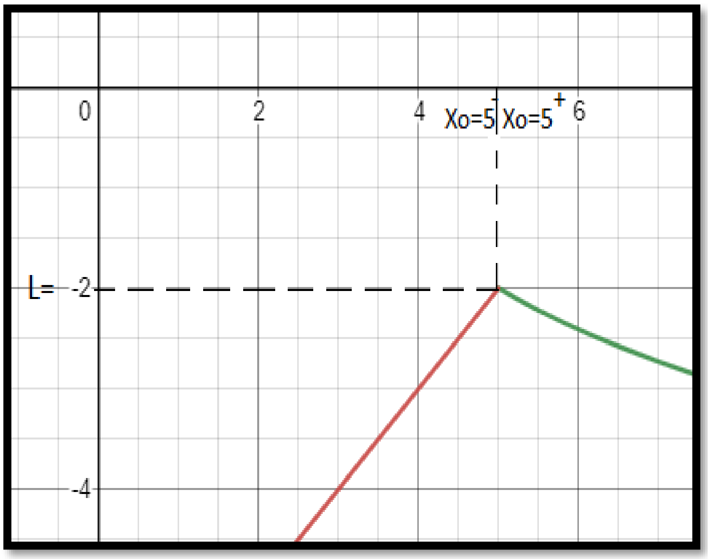


Figura. 2.12 Gráfica de la 3° función con limites laterales

$\lim_{x\to 5} h(x)$	Determinación del límite en x=5
$\lim_{x\to 5^-} h(x) = \dfrac{x^2-12x+35}{x-5} = \dfrac{0}{0}$	Evaluación del límite al acercase a 5 por la izquierda
$\lim_{x\to 5^-} \dfrac{(x-7)(x-5)}{x-5}$	Levantamiento de la indeterminación (factorización)
$\lim_{x\to 5^-}(x-7) = \lim_{x\to 5^-}(5-7) = -2 = L1$	Solución del límite por la izquierda
$\lim_{x\to 5^+} h(x) = \lim_{x\to 5^+} \dfrac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} = \dfrac{0}{0}$	Evaluación del límite al acercase a 5 por la derecha
$\lim_{x\to 5^+} \dfrac{(x-5)\left(1+\sqrt{x-4}\right)}{-(x-5)}$	Levantamiento de indeterminación (factorización)
$\lim_{x\to 5^+} -\left(1+\sqrt{x-4}\right) = \lim_{x\to 5^+} -\left(1+\sqrt{5-4}\right) = -2 = L2$	Solución del límite por la izquierda
$L1 = L2$	Como los límites laterales son iguales el límite existe.

d) Dada la siguiente función determinar si existe el límite en los puntos de conflicto.

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\boldsymbol{h(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & si\ x \le 1 \\ 1, & si\ 1 < x \le 2 \\ |x-3|, & si\ x > 2 \end{cases}}$$

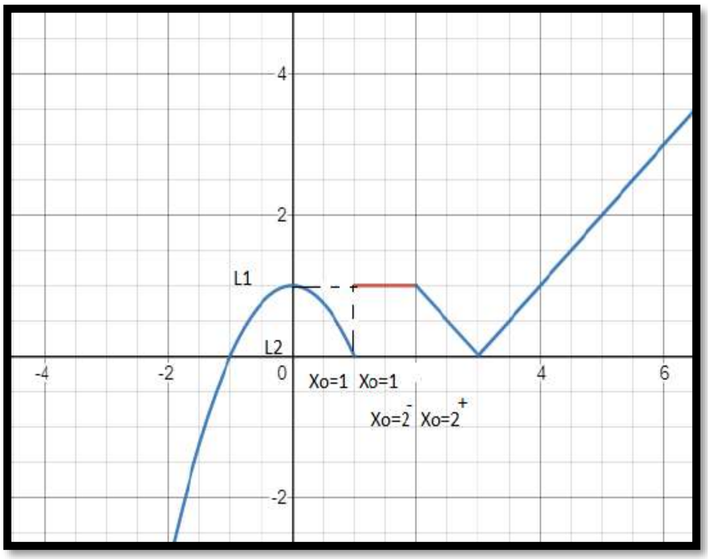


Figura. 2.13 Gráfica de la 4° función con limites laterales

$\lim\limits_{x \to 1} h(x)$	Determinación del límite en x=1
$\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x^2 = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 - (1^2) = 0 = L2$	Evaluación del al acercase a 1 por la izquierda
$\lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 1 = 1 = L1$	Levantamiento de indeterminación (factorización)
$L1 \neq L2$	Solución, no existe límite en x=1
a) $\lim_{x \to 2} h(x)$	Determinación del límite en x=2
$\lim\limits_{x \to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} 1 = 1 = L1$	Evaluación del límite de la función cuando se acerca a 2 por la izquierda
$\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$ $|x-3| = \begin{cases} x-3, & x \ge 3 \\ 3-x, & x < 3 \end{cases}$	Evaluación del límite de la función cuando se acerca a 2 por la derecha. Al ver un valor absoluto se evalúa y se trabaja con el que está dentro del intervalo

ISBN: 978-631-6557-36-0

$\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-2) = 1 = L2$ Sustitución del límite en x=2

$L1 = L2$ Solución, existe límite en x=2

e) Determinar el límite de la función en $x = \frac{5}{2}$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} \sqrt{|x| + [13x]}$$

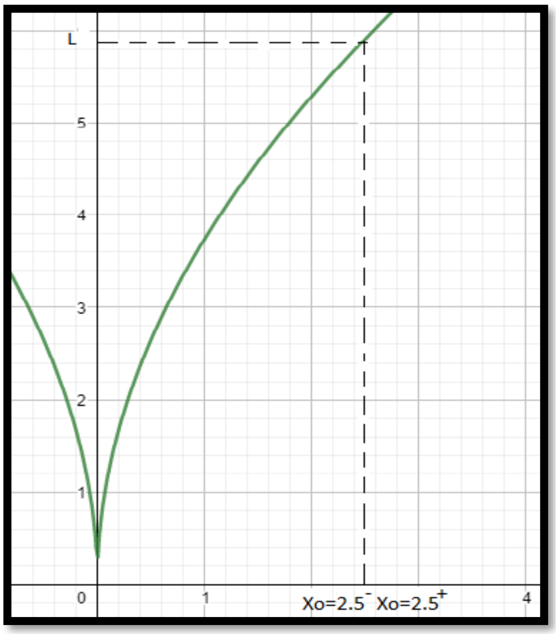


Figura. 2.14 Gráfica de la 5° función con limites laterales

En el presente problema la función que se acerca por la derecha y por la izquierda a $x_0 = \frac{5}{2}$ es la misma. Sin embargo, es necesario garantizar que lo que está dentro del radical sea real.

$\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}} h(x)$ Determinación del límite en $x = \frac{5}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^-} \sqrt{|x| + |13x|} = \lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^-} \sqrt{\left|\frac{5}{2}\right| + \left|13.\frac{5}{2}\right|}$ Determinación del límite en $x = \frac{5}{2}$

Por la izquierda

$\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}^-} \sqrt{35} = L1$ Encontrado el límite por la izquierda

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}^{+}}\sqrt{|x|+|13x|}=\lim_{x\to\frac{5}{2}^{-}}\sqrt{\left|\frac{5}{2}\right|+\left|13.\frac{5}{2}\right|}$$

Determinación del límite en $x=\frac{5}{2}$

Por la derecha

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}^{-}}\sqrt{35}=L2$$

Encontrado el límite por la izquierda

$$L1=L2$$

El límite si existe

f) Calcular si existe el límite

$$\boldsymbol{\lim_{x\to -3}\frac{[\![x-1]\!]-x}{\sqrt{x^{2-}[\![x]\!]}}}$$

$$\lim_{x\to 3^{-}}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{[\![x]\!]-3}$$

Con propiedades del máximo entero el límite cambia

Identificación del intervalo

$$n\le x<n+1\ con\ n=2$$

Análisis del máximo entero n= 2 porque el análisis pide por la izquierda a 3

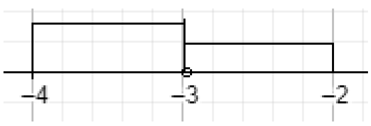
$$[\![x]\!]=\{2;2\le x<3\quad ;\ [\![x]\!]=\ 2$$

$$\lim_{x\to 3^{-}}\frac{\sqrt{3x^2+1}+2x}{[\![x]\!]-3}=\lim_{x\to 3^{-}}\frac{\sqrt{3(3)^2+1}+2(3)}{2-3}=-\left(\sqrt{28}+6\right)$$
$$\approx -11.29$$

Análisis del límite

$$\lim_{x\to -3}\frac{[\![x]\!]-1-x}{\sqrt{x^2-[\![x]\!]}}$$

Ordenación del límite con las propiedades del máximo entero



Se analizan los intervalos para cada valor cercanos a x=-3

$$[\![x]\!]\{-4\qquad -4\le x<-3\ \ -3\qquad -3\le x<-2\}$$

Análisis del máximo entero en cada intervalo

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$lim_{\ x\to -3^-}\frac{[\![x]\!]-1-x}{\sqrt{x^2-[\![x]\!]}}=lim_{\ x\to -3^-}\frac{-4-1-(-3)}{\sqrt{(-3^2)-(-4)}}$$

Análisis del límite por la

$$\frac{-5+3}{\sqrt{13}}=\frac{-2}{\sqrt{13}}\approx -0.55=L1$$

Izquierda a $x_0\ =-3$

$$lim_{\ x\to -3^+}\frac{[\![x]\!]-1-x}{\sqrt{x^2-[\![x]\!]}}=lim_{\ x\to -3^-}\frac{-3-1-(-3)}{\sqrt{(-3^2)-(-3)}}$$

Análisis del límite por la

$$\frac{-4+3}{\sqrt{12}}=\frac{-1}{2\sqrt{3}}\approx -0.29=L2$$

derecha a $x_0\ =-3$

$$L1\neq L2$$

No existe límite en x=-3

g) Calcular si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, $donde$

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x>0\\ x, x<0\end{cases}$$

Problema planteado

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^2=0$$

Se evalúa en 0 por la derecha

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x=0$$

Se evalúa en 0 por la izquierda

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=0$$

La función es continua

ISBN: 978-631-6557-36-0

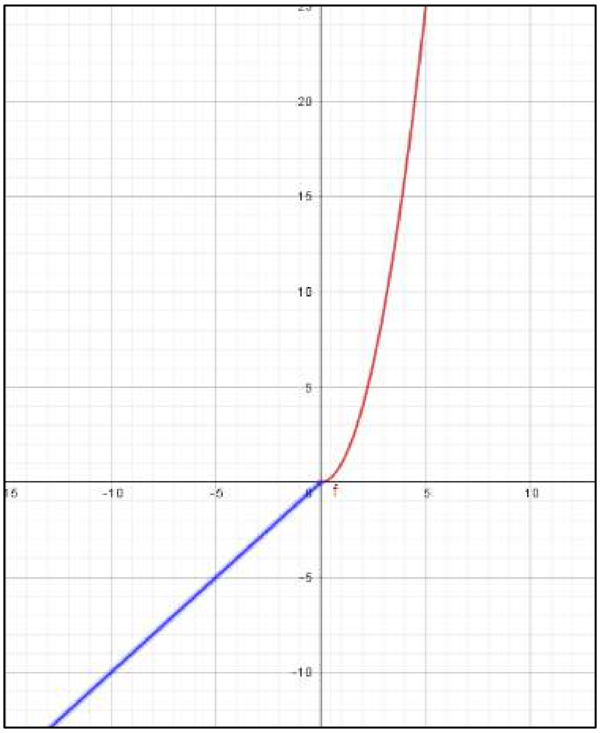


Figura. 2.15 Gráfica de la 6° función f(x)

h) Determina si la función $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \ si \ x < 1 \\ -x \quad si \ x \geq 1 \end{cases}}$ es continua en $\boldsymbol{x_0 = 1}$

$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 2x - 3 \ si \ x < 1 \\ -x \quad si \ x \geq 1 \end{cases}}$	Evaluamos la función por la izquierda y por la derecha
$\lim\limits_{x \to 1^+} - x$	Evaluamos el Límite por la izquierda
-1	Solución por la izquierda
$\lim\limits_{x \to 1^-} 2x - 3$	Evaluamos el Límite por la derecha
2(1)-3=-1	Solución por la derecha
$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \ -1$	La función es continua

ISBN: 978-631-6557-36-0

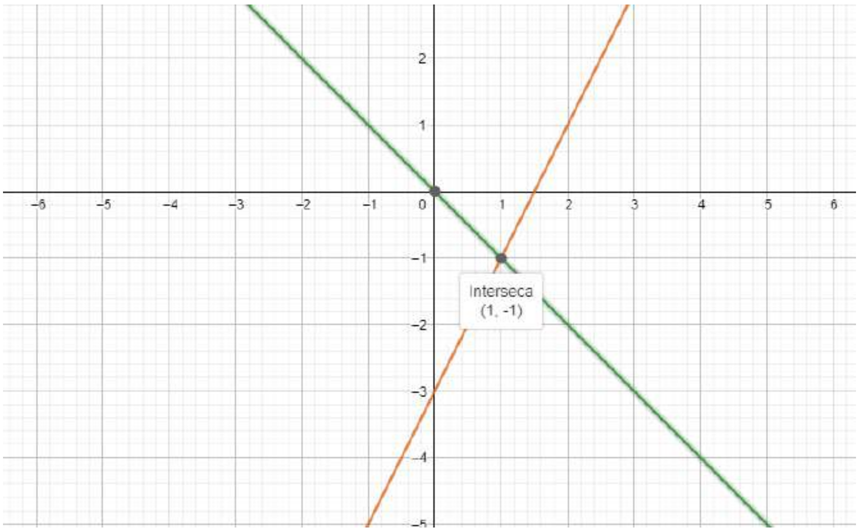


Figura. 2.16 Gráfica de la 7° función f(x) con punto de intersección

i) Hallar los valores de A y B

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{ax-3} & \boldsymbol{x \leq -2} \\ \boldsymbol{x^2-1} & \boldsymbol{-2 < x < 3} \\ \boldsymbol{bx+1} & \boldsymbol{x \geq 3} \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} = \lim\limits_{x\to 2^+}$	Tomamos dos funciones con su límite respectivo por izquierda y derecha, las igualamos
$\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-3) = \lim\limits_{x\to 2^+}(x^2-1)$	Resolvemos la igualdad reemplazando el límite
2a-3=4-1 2a=6 ⇒ a=3	Solución y obtenemos el valor de a
$\lim\limits_{x\to 3^-} = \lim\limits_{x\to 3^+}$	Tomamos dos funciones con su límite respectivo por izquierda y derecha, las igualamos
$\lim\limits_{x\to 3^-}(x^2-1) = \lim\limits_{x\to 3^+}(bx+1)$	Resolvemos la igualdad reemplazando el límite
9-1=3b+1 8=3b+1 7=3b $\frac{7}{3} = b$	Solución y obtenemos el valor de b
$ax-3$ $bx+1$	Y los valores obtenidos reemplazamos en cada función y resolvemos

ISBN: 978-631-6557-36-0

3x-3

$\frac{7}{3}x + 1$

Solución

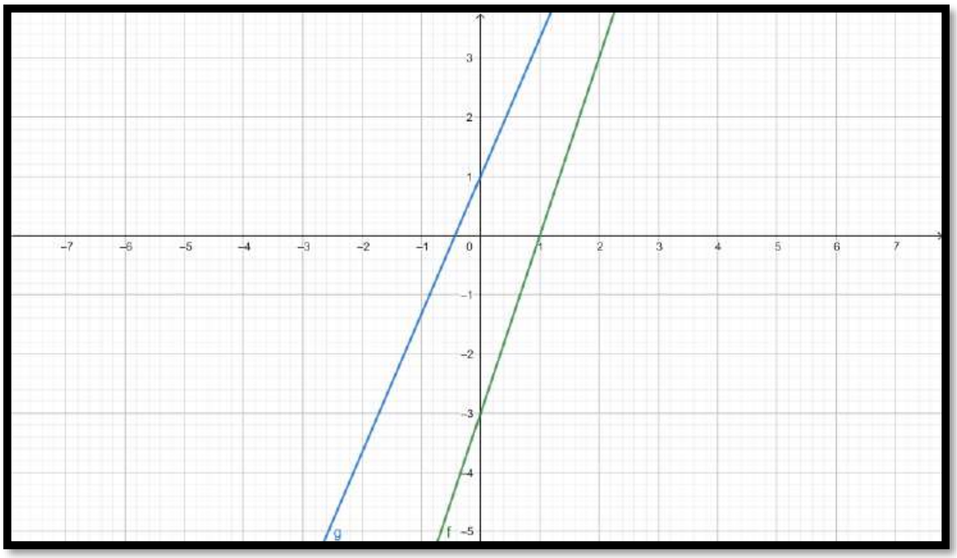


Figura. 2.17 Gráfica de la 8° función f(x) con limites laterales

j) $$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} |x| & si & x < -3 \\ x^2 - 2 & si & -3 \leq x < 3 \\ \log(x+7)^7 & si & x \geq 3 \end{cases}, en\ x = -3\ y\ x = 3}$$

$\lvert x \rvert < -3$ 3	Resolvemos cada función con su intervalo
$-3 \leq x^2 - 2 < 3$	Resolvemos cada función con su intervalo
$-3 + 2 \leq x^2 < 3 + 2$	Pasamos al otro lado el -2
$-1 \leq x^2 < 5$ $x \in \sqrt{-1}; \sqrt{5}$	Y eliminamos el elevado al cuadrado con raíz
$x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5})$	Pero como no hay raíz de números negativos solo se toma en cuenta el primer resultado
$\log(x+7)^7 \geq 3$	Planteamos otro rango con el paréntesis
$\log(x+7)^7 \geq 3, x > -7$	Elevamos una raíz a la séptima para todos

ISBN: 978-631-6557-36-0

$\sqrt[7]{\log(x+7)^7} \geq \sqrt[7]{3}, x > -7$ Despejamos el logaritmo

(x+7) $\geq 10^{\sqrt[7]{3}}, x > -7$ Despejamos el 7

X$\geq 10^{\sqrt[7]{3}} - 7, x > -7$ Solución

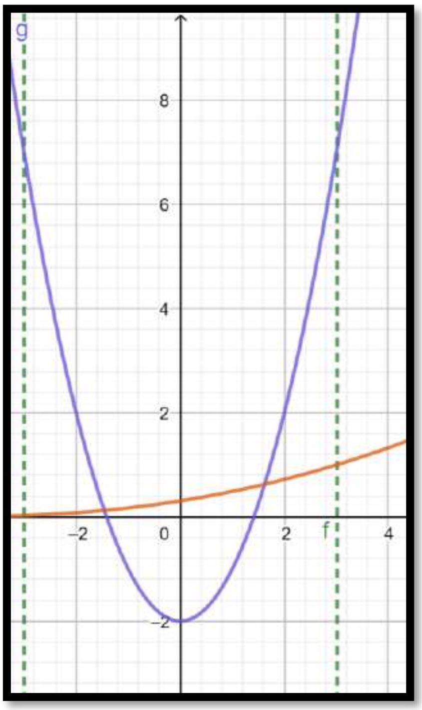


Figura. 2.18 Gráfica de la 9° función f(x) con logaritmo

2.5.3 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LIMITES LATERALES

a) $Calcular\ si\ existe\ \lim_{x\to 0} f(x)\ , donde\ f(x) = \begin{cases} x^2, x > 0 \\ x, x < 0 \end{cases}$

b) $Calcular\ si\ existe\ \lim_{x\to 1} f(x), \lim_{x\to 4} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} x^2, si\ x < 1 \\ x, si\ 1 < x < 4 \\ 4 - x, si\ x > 4 \end{cases}$

c) $Calcular\ si\ existe\ a)\ \lim_{x\to 1} f(x), b)\ \lim_{x\to 2} f(x),\ donde\ f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, si\ x \leq 1 \\ 1, si\ 1 < x \leq 2 \\ |x-3|, si\ x > 2 \end{cases}$

d) $Calcular\ si\ existe\ \lim_{x\to 3} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}, si\ x < 3 \\ \frac{\sqrt{x+1}-1}{x+2}, si\ x \geq 3 \end{cases}$

e) $Calcular\ \lim_{x\to 0} \frac{[|x|]-x}{x}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

f) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 3}[|3x|] + 13x^2 - 11$

g) *Calcular si existe* $\lim_{x\to \frac{5}{3}}\sqrt{1\times 1 + [|3x|] + 4}$

h) *Calcular* $\frac{lim}{x\to\sqrt{2}} = [x^2 - sig\ (|x^2-1|-1)]$

i) *Calcular si existe* $A)\ \frac{lim}{x\to -1} f(x) \qquad B)\ \frac{lim}{x\to 1} f(x), donde\ f(x) = (x - 2\llbracket x\rrbracket)^2$

j) *Calcular si existe* $\frac{lim}{x\to -2}\ f(x), donde\ f(x) \begin{cases} \dfrac{\llbracket x-1\rrbracket - x}{\sqrt{x-\llbracket x\rrbracket}} & si -9 \le x < -2 \\ \dfrac{\llbracket 3x\rrbracket - \llbracket x\rrbracket - 8\left\llbracket \frac{x}{3}\right\rrbracket}{\llbracket x\rrbracket - x} & si -2 \le x < 7 \end{cases}$

k) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 3} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}, si\ x < 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+2}, si\ x \ge 3 \end{cases}$

l) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 3} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}, si\ x < 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+2}, si\ x \ge 3 \end{cases}$

m) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 3} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-2x^2-5x+6}{x-3}, si\ x < 3 \\ \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x+2}, si\ x \ge 3 \end{cases}$

n) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 3} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (3x\ +\ 2), si\ x < 0 \\ \dfrac{1}{x+2}, si\ x \ge 0 \end{cases}$

o) *Calcular si existe* $\lim_{x\to -1} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (x^3+2x^2+1), si\ x < -1 \\ (2x^2-3x+1), si\ x \ge -1 \end{cases}$

p) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 2} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (x^2-2x+1), si\ x < 2 \\ (x^3+3x^2+1), si\ x \ge 2 \end{cases}$

q) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 0} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (2x^2+2x+1), si\ x < 0 \\ (x^3-x^2+1), si\ x \ge 0 \end{cases}$

r) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 2} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (x^2+2x+1), si\ x < 2 \\ (x^3-2x^2+1), si\ x \ge 2 \end{cases}$

s) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 0} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (2x^2-2x+1), si\ x < 0 \\ (x^3+3x^2+1), si\ x \ge 0 \end{cases}$

t) *Calcular si existe* $\lim_{x\to 1} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (x^3+3x^2+1), si\ x < 1 \\ (3x^2+3x+1), si\ x \ge 1 \end{cases}$

u) *Calcular si existe* $\lim_{x\to -1} f(x), donde\ f(x) = \begin{cases} (3x^2+3x+1), si\ x < -1 \\ (x^3-3x^2+1), si\ x \ge -1 \end{cases}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

v) Calcular si existe $\lim_{x\to 0} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases}(2x^2+3x+1), si\ x<0\\(x^3-2x^2+1), si\ x\geq 0\end{cases}$

w) Calcular si existe $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases}(x^3-2x^2+1), si\ x<1\\(3x^2-2x+1), si\ x\geq 1\end{cases}$

x) Calcular si existe $\lim_{x\to -1} f(x)$, donde $f(x) = \begin{cases}(3x^2-2x+1), si\ x<-1\\(x^3+3x^2+1), si\ x\geq -1\end{cases}$

2.6 LÍMITES AL INFINITO

El estudio de límites de una función de variable real implica analizar todos los casos posibles de acuerdo con el comportamiento de las funciones cuando estas tienden acercarse a cierto valor x_0. En múltiples ocasiones el límite de la función en x_0 no es tan fácil identificar el valor de L, ya que este crece o decrece sin fin (límites infinitos). Matemáticamente representadas por. Ver figura 36

$$\boldsymbol{\lim_{x\to Xo} h(x) = \infty}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to Xo} h(x) = -\infty}$$

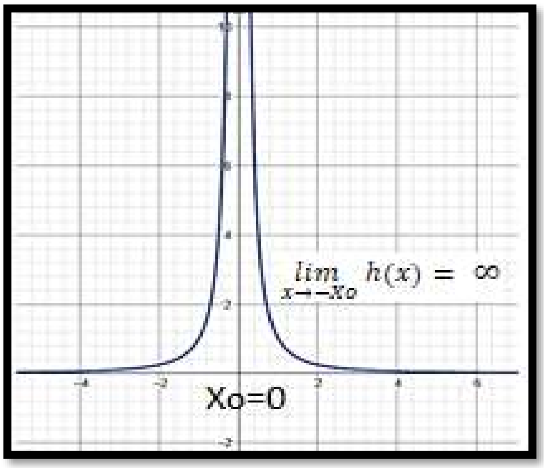


Figura. 2.19 Límites al infinito

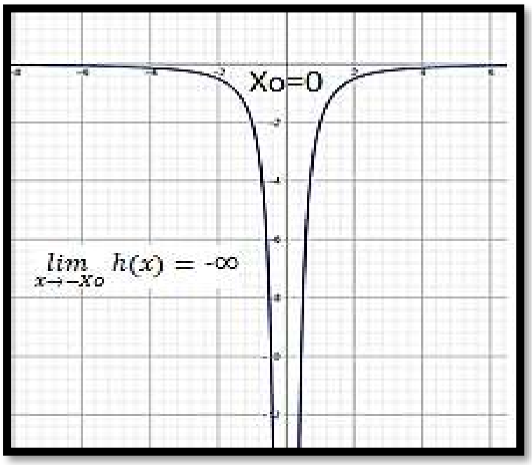


Figura. 2.20 Límites al infinito negativos

Toda la teoría existente en este ejemplar lleva una secuencia y una relación directa, es por eso por lo que en la sección anterior se estudió la existencia de un límite con la verificación de los límites laterales, y es esta misma que se utiliza para la resolución de los límites al infinito. A continuación, se presenta los posibles casos de esta clasificación.

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\boldsymbol{lim}_{\,x\to Xo^+}\ \boldsymbol{h(x)} = \infty$$

$$\boldsymbol{lim}_{\,x\to Xo^+}\ \boldsymbol{h(x)} = -\infty$$

$$\boldsymbol{lim}_{\,x\to Xo^-}\ \boldsymbol{h(x)} = \infty$$

$$\boldsymbol{lim}_{\,x\to Xo^-}\ \boldsymbol{h(x)} = -\infty$$

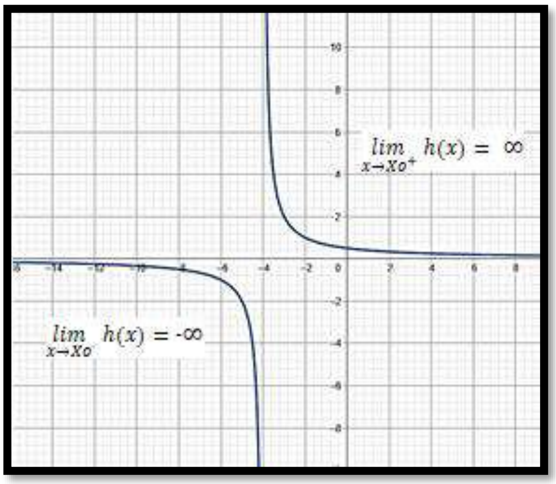


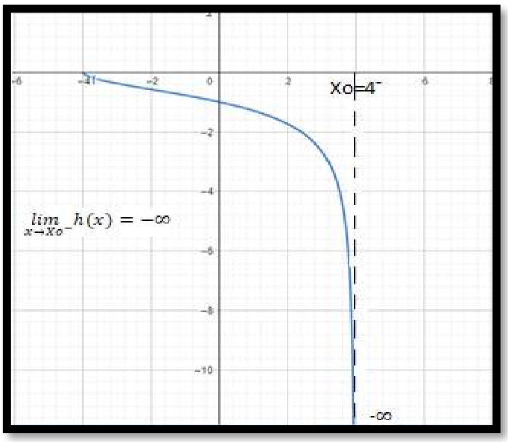
Figura. 2.21 Límites laterales al infinito

Los límites infinitos son provocados por la presencia de asíntotas verticales, las cuales son rectas paralelas al eje '**y**, por donde se acerca la función tanto como pueda sin tener la posibilidad de intersecarla en ningún momento (Stewart, 2008).

2.6.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITES INFINITOS

a) Determinar el límite de la función en x=4

$$\boldsymbol{lim}_{\,x\to 4^-}\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4}$$



ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 2.22 Límites al infinito ejercicio 1

$$lim_{\ x\to 4^-}\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} = lim_{\ x\to 4^-}\ \frac{\sqrt{16-4^2}}{4-4} = \frac{0}{0}$$

Evaluación del límite en x=4 por la izquierda

$$lim_{\ x\to 4^-}\ \frac{\sqrt{16-x^2}}{x-4} * \frac{\sqrt{16-x^2}}{\sqrt{16-x^2}}$$

Levantamiento de la indeterminación con factorización y racionalización

$$lim_{\ x\to 4^-}\ \frac{16-x^2}{(x-4)\sqrt{16-x^2}}$$

$$lim_{\ x\to 4^-}\ \frac{(4-x)(4+x)}{-(4-x)\sqrt{16-x^2}}$$

Eliminación de términos en común

$$lim_{\ x\to 4^-} - \frac{(4+x)}{\sqrt{16-x^2}}$$

$$lim_{\ x\to 4^-} - \frac{(4+8)}{\sqrt{16-4^2}} = -\infty$$

Solución

b) Calcular si existe el límite en $x = \sqrt{2}$

$$\frac{[\![x^2-3]\!]-[\![x^2]\!]}{x^2-2}$$

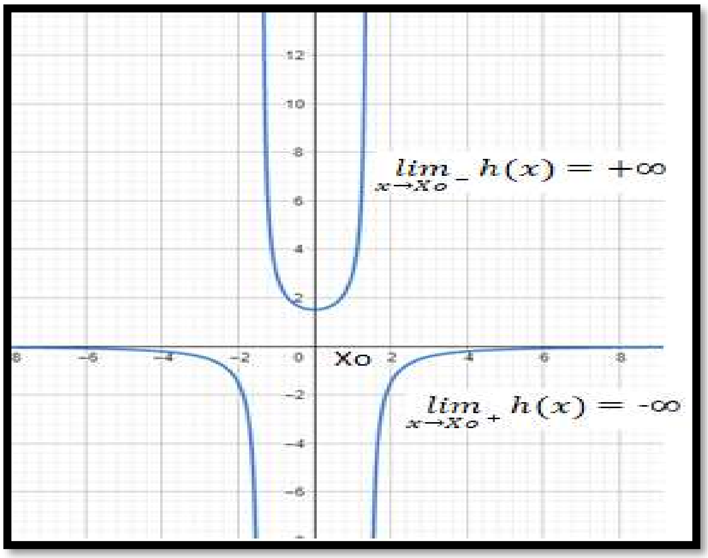
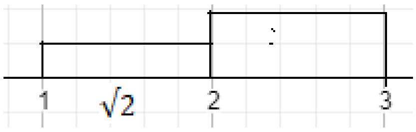


Figura. 2.23 Limites al infinito ejercicio 2

$$\frac{[\![x^2]\!]-3-[\![x^2]\!]}{x^2-2}$$

Ordenación del límite con propiedades del máximo entero

ISBN: 978-631-6557-36-0



Intervalos presentes en el máximo entero

$[\![x^2]\!]\{1 \qquad 1 \leq x^2 < 2 \qquad 2 \leq x^2 < 3 \quad \}$

Resolución del máximo entero

$$[\![x^2]\!] = 1 \rightarrow \frac{[\![x^2]\!] - 3 - [\![x^2]\!]}{x^2 - 2}$$

Límite por la izquierda a $\sqrt{2}$

$$\frac{1 - 3 - 1}{\sqrt{2}^2 - 2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$$

Evaluación por la izquierda a $\sqrt{2}$

$$[\![x^2]\!] = 2 \rightarrow \frac{[\![x^2]\!] - 3 - [\![x^2]\!]}{x^2 - 2}$$

Límite por la derecha a $\sqrt{2}$

$$\frac{2 - 3 - 2}{\sqrt{2}^2 - 2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

Evaluación por la derecha a $\sqrt{2}$

c) Determinar el límite en Xo=-4

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{x+4}}$$

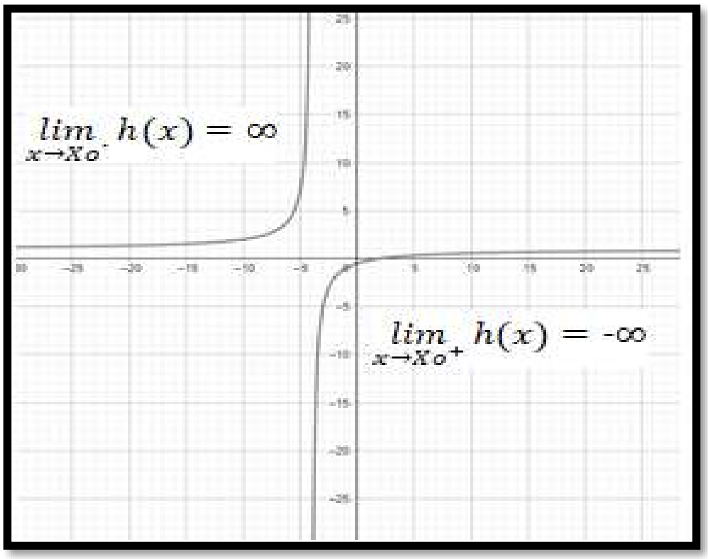


Figura. 2.24 Limites al infinito ejercicio 3

$$\frac{x-2}{x+4}$$

Evaluación del límite en x=-4 por la izquierda

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{-4-2}{-4+4}=\frac{-6}{0^-}=\infty$$

La función tiende a cero por la izquierda

$$\frac{x-2}{x+4}$$

Evaluación del límite en x=-4 por la izquierda

$$\frac{-4-2}{-4+4}=\frac{-6}{0^+}=-\infty$$

La función se hace cero por la derecha

d) Encontrar el límite $x = 1^-$

$$\frac{3-x^2}{2x^2+5x+3}$$

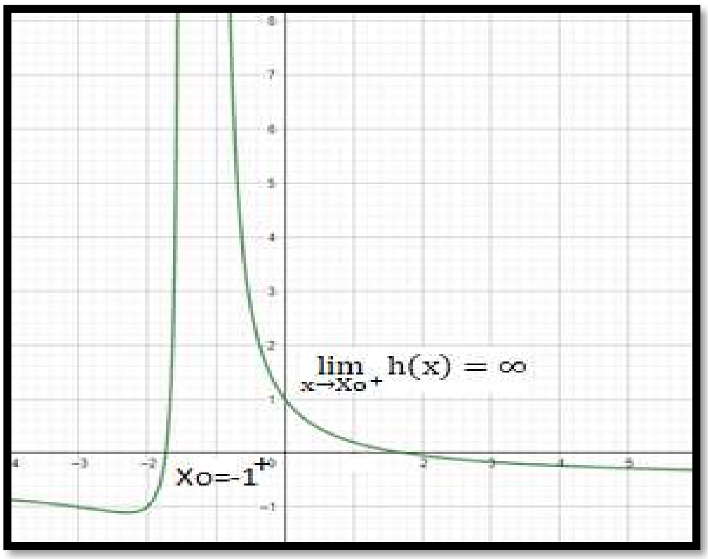


Figura. 2.25 Limites al infinito ejercicio 4

$$\frac{3-x^2}{2x^2+5x+3}=\frac{3-(-1)^2}{2(-1)^2+5(-1)+3}$$

Evaluación del límite en x=1 por la izquierda

$$\frac{3-1}{2-5+3}=\frac{2}{0^+}=\infty$$

La función se hace cero por la derecha

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.6.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LÍMITES INFINITOS

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2+x}{x-5}$

d) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{1-x}$

e) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x-2}{x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{4x^2+1}{9-x^2}$

g) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(2-x)+3}{(x-2)^2}$

h) $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x-a}$

i) $\lim\limits_{x\to 4^+} \frac{\sqrt{x^2-16}}{4-x}$

j) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{[1-x]+3}{1-x}$

k) $\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{(-1)^{[x]}(2-[x])-1}{2-x}$

l) $\lim\limits_{x\to \left(\frac{3}{2}\right)^+} \frac{([2x-1]+x)+1}{x-\frac{3}{2}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{([1-x]+2x)+1}{x}$

n) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{[x-1]}+4}{1-x}$

o) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{3x^2+2x+4}{-2x^{2+5x+3}}$

p) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{3-x^2}{2x^2+5x+3}$

2.7 LÍMITES INFINITOS

Al existir diferentes tipos de funciones, el comportamiento de cada una será diferente cuando la variable independiente tiende a cierto valor de Xo. Sin embargo, cuando la variable independiente crece y decrece sin límite la función tiende a un mismo valor de **L**, a esta última referencia se denomina límite infinito representado matemáticamente por:

$$h(x) = L \quad h(x) = L$$

En la resolución de problemas de límites infinitos se utiliza los artificios matemáticos mencionados en secciones anteriores para levantar las indeterminaciones, en el caso en donde la función en análisis sea una polinómica se utiliza además la división del

ISBN: 978-631-6557-36-0

numerador y denominador para el índice de mayor potencia. Finalmente se puede evidenciar el valor del límite mediante la gráfica correspondiente. El valor de L en estos casos siempre será una asíntota horizontal. Ver figura 45

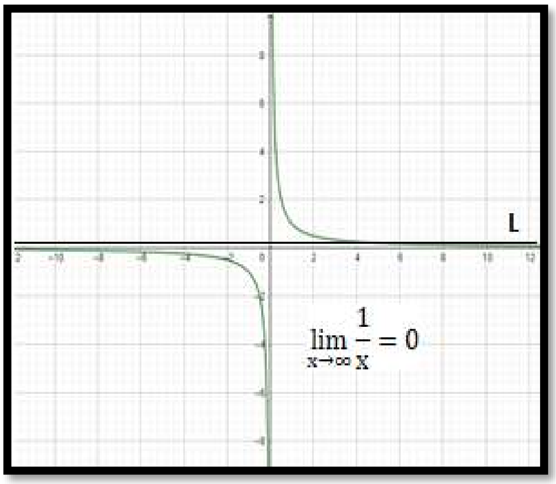


Figura. 2.26 Limites al infinito ejercicio 5

2.7.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITES INFINITOS

a) $\frac{(2r^3+4r^2+5r)(r^2+r+1)}{(r+2)(r^4+2r^3+7r^2+r-1)}$

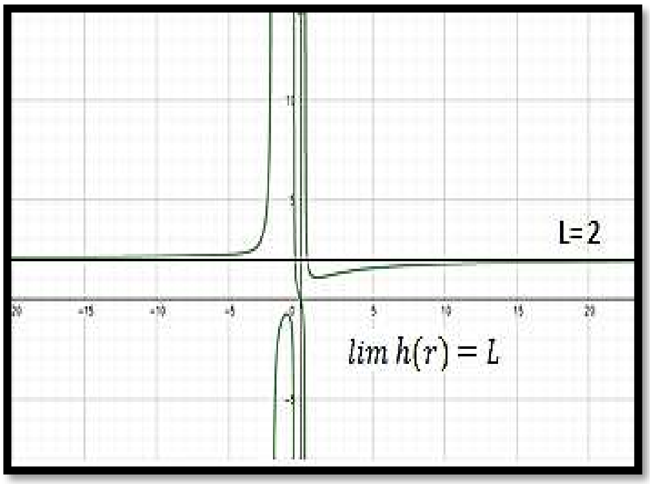


Figura. 2.27 Limites al infinito ejercicio 6

$$\frac{(2r^3+4r^2+5r)(r^2+r+1)}{(r+2)(r^4+2r^3+7r^2+r-1)} = \frac{\infty}{\infty}$$

Análisis del límite en r=∞

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{2r^5}{r^5}+\frac{6r^4}{r^5}+\frac{11r^3}{r^5}+\frac{9r^2}{r^5}+\frac{5r}{r^5}}{\frac{r^5}{r^5}+\frac{4r^4}{r^5}+\frac{11r^3}{r^5}+\frac{15r^2}{r^5}+\frac{r}{r^5}-\frac{2}{r^5}}$$

Levantamiento de la indeterminación con la división del índice de mayor potencia.

$$\lim_{r\to\infty}\frac{2+\frac{6}{r}+\frac{11}{r^2}+\frac{9}{r^3}+\frac{5}{r^4}}{1+\frac{4}{r}+\frac{11}{r^2}+\frac{15}{r^3}+\frac{1}{r^4}-\frac{2}{r^5}}\lim_{r\to\infty}\frac{2}{1}=2$$

Evaluación del límite, teniendo en cuenta que todo número dividido para infinito es igual a cero.

b) $\left(\sqrt{\boldsymbol{r}+\mathbf{2}}-\sqrt{\boldsymbol{r}}\right)=\infty-\infty$

Evaluación del límite cuando $r\to\infty$

$$\left(\sqrt{r+2}-\sqrt{r}\right)*\frac{\left(\sqrt{r+2}+\sqrt{r}\right)}{\left(\sqrt{r+2}+\sqrt{r}\right)}$$

Levantamiento de la indeterminación con racionalización

$$\frac{\left(\sqrt{r+2}\right)^2-\left(\sqrt{r}\right)^2}{\left(\sqrt{r+2}+\sqrt{r}\right)}$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r+2-r}{\left(\sqrt{r+2}+\sqrt{r}\right)}=lim_{r\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt{r+2}+\sqrt{r}\right)}$$

Eliminación de términos en común

$$lim_{r\to\infty}\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{\frac{r}{r}+\frac{2}{r}}+\sqrt{\frac{r}{r}}\right)}=\frac{0}{2}=0$$

División para el índice de mayor potencia

c) $\frac{\mathbf{1+2+3+\cdots+}\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{r}\mathbf{-1}}-\frac{\boldsymbol{r}}{\mathbf{2}}=\infty-\infty$

Evaluación del límite cuando $r\to\infty$

$$\frac{\frac{1}{2}r(r+1)}{r-1}-\frac{r}{2}=\frac{r(r+1)}{2(r-1)}-\frac{r}{2}$$

Levantamiento de indeterminación mediante artificios matemáticos

$$\left(\frac{r(r+1)-r(r-1)}{2(r-1)}\right)=\left(\frac{r^2+r-\ r^2+r}{2(r-1)}\right)$$

Suma de fracciones y eliminación de términos semejantes

$$\left(\frac{2r}{2(r-1)}\right)=\frac{\frac{r}{r}}{\frac{r}{r}-\frac{1}{r}}==1$$

División para el índice de mayor potencia

d) $\frac{\mathbf{1^2+2^2+3^2+\cdots+}\boldsymbol{r}^{\mathbf{2}}}{\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\mathbf{+1})}-\frac{\boldsymbol{r}}{\mathbf{3}}$

Evaluación del límite cuando $r\to\infty$

$$\frac{\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}}{r(r+1)}-\frac{r}{3}$$

Levantamiento de indeterminación mediante artificios matemáticos

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{(2r+1)}{6}-\frac{r}{3}$$

Eliminación de términos en común.

$$\frac{2r+1-2r}{6}=\frac{1}{6}$$

Suma de fracciones y solución

e) Dada la siguiente función determinar las asíntotas horizontales.

$$h(r)=r^2-\sqrt{r^4-r^2+1}$$

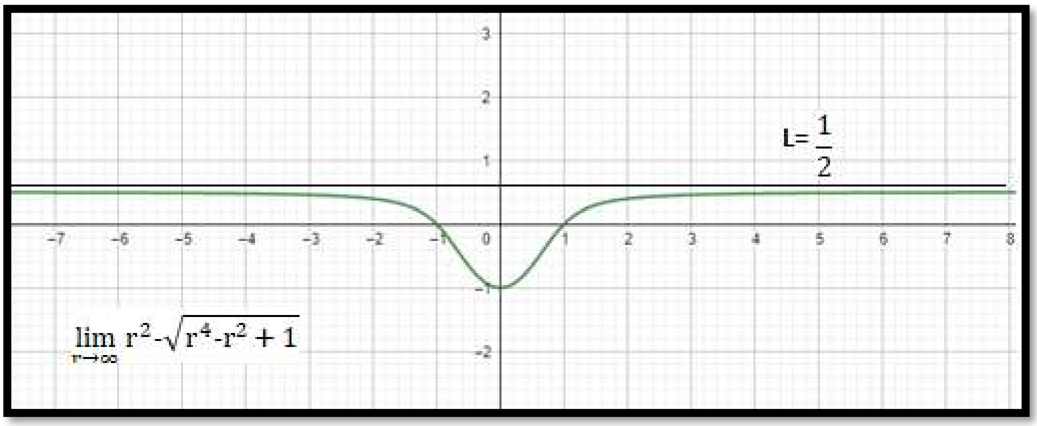


Figura. 2.28 Limites al infinito ejercicio 7

$$h(r)=r^2-\sqrt{r^4-r^2+1}$$

Aplicamos el límite de la función h(x) cuando x→ ∞

$$\lim_{r\to\infty} r^2-\sqrt{r^4-r^2+1}=\infty-\infty$$

Evaluación del límite en r=∞

$$\lim_{r\to\infty} r^2-\sqrt{r^4-r^2+1}*\frac{r^2+\sqrt{r^4-r^2+1}}{r^2+\sqrt{r^4-r^2+1}}$$

Levantamiento de la indeterminación con racionalización

$$\lim_{r\to\infty}\frac{(r^2)^2-\left(\sqrt{r^4-r^2+1}\right)^2}{r^2+\sqrt{r^4-r^2+1}}=\lim_{r\to\infty}\frac{r^4-r^4+r^2-1}{r^2+\sqrt{r^4-r^2+1}}$$

Eliminación de términos en común

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\frac{r^2}{r^2}-\frac{1}{r^2}}{\frac{r^2}{r^2}+\sqrt{\frac{r^4-r^2+1}{r^4}}}=\lim_{r\to\infty}\frac{1-0}{1+\sqrt{1-0+0}}=\frac{1}{2}$$

División para el índice de mayor potencia
La asíntota será L=$\frac{1}{2}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.7.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LIMITES AL INFINITO

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x+1}{x-1}$

b) $\lim\limits_{x\to 5^-} \frac{2+x}{x-5}$

c) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x+2}{1-x}$

d) $\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{x-2}{x+1}$

e) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{4x^2+1}{9-x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right)$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2}\right)$

h) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^{2+7x-1}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^3-4x+1}{(x^2+1)(x^2-1)}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{1+8x^2}{x^2+4}}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[2]{\frac{x^2+x+3}{(x-1)(x+1)}}$

l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt[4]{x^4+1}+x}{x+1}$

m) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{2x+3}{x-5}$

n) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{5x^2-4x+1}{2x^2+x-3}$

o) $\lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{x^3-2x^2+x}{4x^3+3x^2-x+2}$

p) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \sqrt{x^2+4x} - x$

q) $\lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{3x^2-2}{5-x^2}$

r) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{\sin x}{x}$

s) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{x^2+3x+1}{x^2-x+2}$

t) $\lim\limits_{x\to\infty^-} \frac{x^2-x+1}{x^2+x+2}$

u) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$

v) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$

w) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{x^2+x+1}{x^3-x+1}$

x) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1}}{x}$

y) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{e^x-e^{-x}}{x}$

z) $\lim\limits_{x\to\infty^+} \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{2x}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.8 CONTINUIDAD EN UNA FUNCIÓN

El comportamiento de una función se lo puede establecer mediante la continuidad de esta a lo largo de R. Es importante mencionar que con la presencia de asíntotas (verticales u horizontales) o por ser una función a trozos estas pueden presentar diferentes puntos de interrupción en donde será necesario evaluar si existe o no continuidad. A nivel del análisis matemático se debe verificar los siguientes pasos para determinar la continuidad (Purcell, & Varberg, 2007).

a) $\lim_{x \to a} h(x) = L$

b) $h(a) = L$

c) $\lim_{x \to a} h(x) = h(a)$

Si los tres pasos se cumplen entonces se dice que la función es continua en el punto de interrupción o de conflicto.

2.8.1 TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Al realizar el proceso de determinación de la continuidad de una función en un punto crítico dado $x_0 = a$ siguiendo los tres pasos detallados en el apartado anterior se tiene los siguientes tipos de discontinuidades (Purcell, & Varberg, 2007).

2.8.1.1 DISCONTINUIDAD EVITABLE

Este tipo de discontinuidad se da, cuando los limites laterales son iguales pero la evaluación de la función es diferente. Toma este nombre ya que si la evaluación de la función tuviera el mismo valor q los limites esta se pudiera evitar (Purcell, & Varberg, 2007).

$$\boldsymbol{\lim_{x \to a^+} = \lim_{x \to a^-} = L1}$$

$$\boldsymbol{f(a) = L2}$$

$$\boldsymbol{L1 \neq L2}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.8.1.2 DISCONTINUIDAD INEVITABLE

Este tipo de discontinuidad se da, cuando los limites laterales son diferentes. Sin embargo, al realizar la evaluación de la función en x=a es posible que esta sea igual al límite por la izquierda o por la derecha, por lo cual a pesar de existir una discontinuidad de tipo inevitable en un punto x0=a se puede tener una continuidad por la derecha o por la izquierda (Purcell, & Varberg, 2007).

$$\lim_{x\to a^+} = L1$$

$$\lim_{x\to a^-} = L2$$

$$L1 \neq L2$$

Si:

$$f(a) = L2$$

Entonces se tendrá una discontinuidad inevitable, pero la función será continua por la izquierda.

Si:

$$f(a) = L1$$

Entonces se tendrá una discontinuidad inevitable, pero la función será continua por la derecha.

2.8.1.3 DISCONTINUIDAD ESENCIAL

Este tipo de discontinuidad se da cuando uno de los dos o los dos limites laterales tienden hacia $\pm\infty$, además dependiendo los valores que pueda tomar la evaluación de la función en el punto x0=a, se puede tener una discontinuidad esencial con continuidad lateral izquierda o derecha según corresponda (Purcell, & Varberg, 2007).

$$\lim_{x\to a^+} = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} = L1$$

$$f(a) = L1$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Por ejemplo, con estos valores que asumimos puedan tener los limites laterales, el tipo de discontinuidad que presentamos es **discontinuidad esencial**, con continuidad lateral izquierda.

2.8.2 EJERCICIOS RESUELTOS DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

f) Determina si la función $g(x) = \{2x - 3 \; si \; x < 1 \; -x \quad si \; x \geq 1$ es continua en $x_0 = 1$

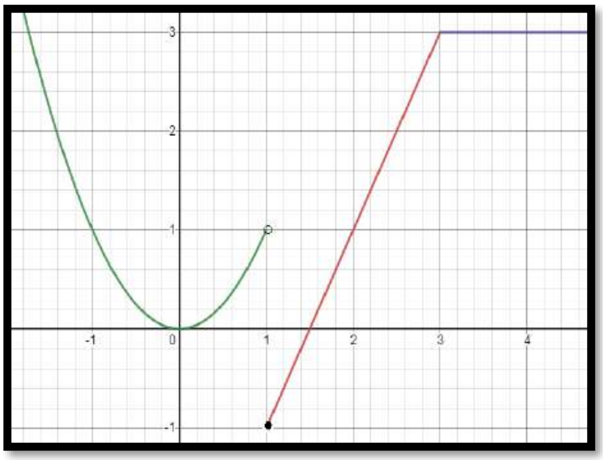


Figura. 2.29 Continuidad lateral

$\lim\limits_{x \to 1^-} 2x - 3 = 2(1) - 3 = -1$	Evaluamos el Límite por la izquierda a x=1
$\lim\limits_{x \to 1^+} -x = -1$	Evaluamos el Límite por la derecha a x=1
$g(x) = -x; \; g(1) = -1$	Evaluamos la función en g (1)
$\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$	La función es continua en x
$\lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1) = -1$	$x_0 = -1$

g) Determinar si la función f(x)=$\{x^2 \quad si \; x \leq 1 \; 2x - 3 \quad si \; 1 < x \leq 3 \; 3 \quad si \;\; 3 < x \}$ es continua en x=1 y x=3

ISBN: 978-631-6557-36-0

CONTINUIDAD EN x=1

f(x)={$x^2 \quad si\ x \leq 1\ 2x-3 \quad si\ 1 < x\ 3 \quad 3\ \ si\ \ x > 3$ }

Evaluamos la función por la izquierda y por la derecha a x=1

$\lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = (1^2) = 1$

Evaluamos el Límite por la izquierda a x=1

$\lim\limits_{x\to 1^+} 2x - 3 = 2(1) - 3 = -1$

Evaluamos el Límite por la derecha a x=1

$f(x) = x^2;\ f(1) = 1$

Evaluamos la función en f (1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} \neq \lim\limits_{x\to 1^+}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} = f(x) = 1$

En x=1 se presenta una discontinuidad inevitable, pero una continuidad por la izquierda.

CONTINUIDAD EN x=3

f(x)={$x^2 \quad si\ x \leq 1\ 2x-3 \quad si\ 1 < x \leq 3\ 3 \quad si\ \ x > 3$ }

Evaluamos la función por la izquierda y por la derecha a x=1

$\lim\limits_{x\to 3} 2x - 3 = 2(3) - 3 = 3$

Evaluamos el Límite por la izquierda a x=1

$\lim\limits_{x\to 3^+} 3 = 3$

Evaluamos el Límite por la derecha a x=1

$f(x) = 2x - 3;\ f(3) = 3$

Evaluamos la función en f (1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(3) = 3$

En x=3 existe continuidad

h) Determinar si la función $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$ es continua en $x = 3$ y traza su grafica

ISBN: 978-631-6557-36-0

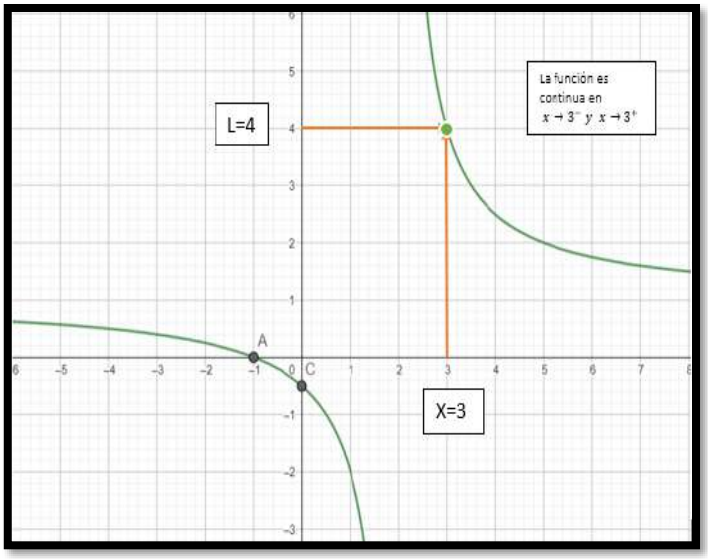


Figura. 2.30 Problema gráfico de continuidad.

Evaluamos el limite $x \to 3$ por la izquierda y la derecha

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

Reemplazamos el 3 por las x

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$$

Se levanta la indeterminación

$$= \frac{3^2 - 2(3) - 3}{3^2 - 5(3) + 6} = \frac{0}{0}$$

Factorización del numerador y denominador

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)}$$

Eliminación de términos en común

Solución

$$\lim_{x \to 3} \frac{(x+1)}{(x-2)} = \frac{3+1}{3-2} = 4$$

$$f(3) = 4 (solución\ grafica)$$

Evaluación de la función en x=3

$$\lim_{x \to 3} f(x) = f(3) = 4$$

En x=3

ISBN: 978-631-6557-36-0

i) La función $f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \;\; x < 0 \\ 2x - 1 \;\; si \; x \geq 0 \end{cases}$ es continua en x=-2 y x=3

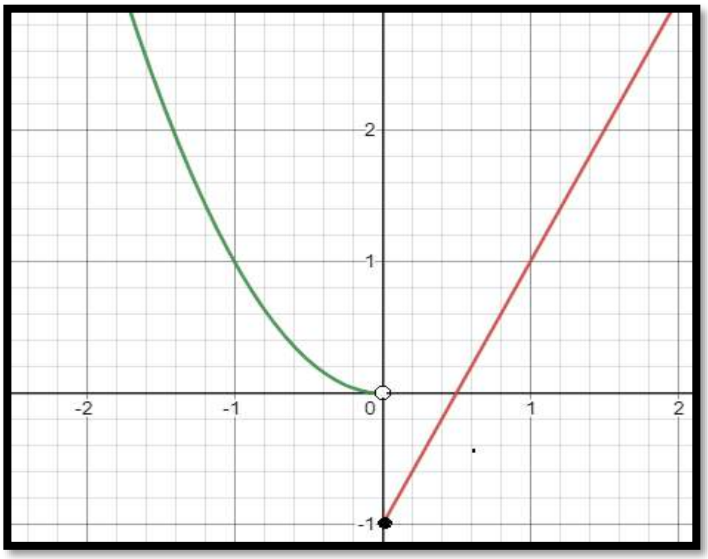


Figura. 2.31 Continuidad lateral 2

CONTINUIDAD EN X=-2

$f(-2) = 2x - 1 \; = 2(-2) - 1 = -5$ — Evaluamos la función en x=-2

$\lim_{x \to -2^+} x^2 = \lim_{x \to -2^-} x^2 = (-2)^2 \; = 4$ — Evaluación del limite

$f(x) \neq f(-2)$ — La función presenta una discontinuidad evitable

CONTINUIDAD EN X=3

$f(3) = 2x - 1 = 2(3) - \; 1 = 5$ — Evaluamos la función en x=3

$\lim_{x \to -2^+} = \lim_{x \to -2^-} x^2 = (2x - 1) = 5$

Evaluación del limite

ISBN: 978-631-6557-36-0

$f(x) = f(3) = 5$ La función es continúa en x=3

j) Determinar la continuidad de la de la función en el punto de conflicto dado.

$$f(x) = \{\frac{1}{x} \; si \; x \neq 0 \; 1 \;\; si \; x = 0$$

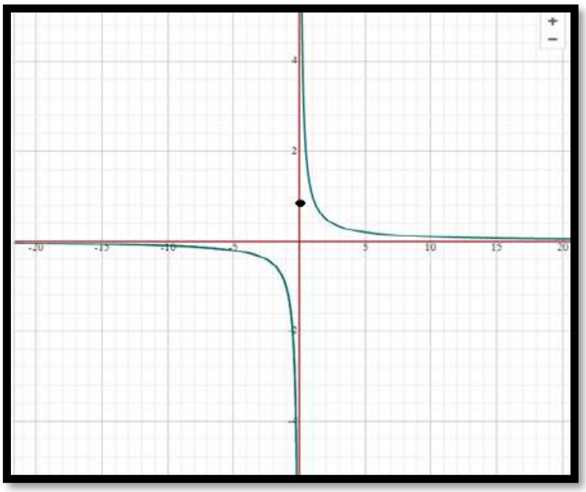


Figura. 2.32 Continuidad lateral 3

$f(0) = x \;\; = 1$ Evaluamos la función en x=0

$\lim_{x \to 0^-} \; = \frac{1}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ Evaluación del límite por la izquierda

$\lim_{x \to 0^+} \; = \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$ Evaluación del límite por la derecha

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \infty$
$\lim_{x \to 0^-} \; = -\infty$ La función presenta una discontinuidad esencial

2.8.3 EJERCICIOS PLANTEADOS DE CONTINUIDAD DE UNA FUNCION

a) Estudia la continuidad de f(x) en x = 0

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Estudiar la continuidad en x = 0 de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x * sen\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

c) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & si \quad x \neq 5 \\ 0 & si \quad x = 5 \end{cases}$$

1) Demostrar que f(x) no es continua en x=5.
2) ¿Existe una función continua que coincida con f(x) para todos los valores x≠5?

d) Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|} \quad si \quad \{x = 0\}$$

e) Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x \cdot sgn(x)$

$$x \cdot sgn(x) \begin{cases} -1 & si \quad x < 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

f) Dada la siguiente función determine su discontinuidad y su clasificación.

$$f(x) = \begin{cases} e^x \; si \, x < 0 \\ 0 \; si \, x = 0 \\ x + 1 \; si \, x > 0 \end{cases}$$

g) Determinar el tipo de discontinuidad.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} \; si \, x \neq -2 \\ 0 \; si \, x = -2 \end{cases}$$

h) Dada la siguiente función determine su discontinuidad y su clasificación.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \; si \, x \leq 0 \\ x - 1 \; si \, x > 0 \end{cases}$$

i) Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 \; si \; x \leq 0 \\ e^x \quad\quad si \; x > 0 \end{cases}$$

j) Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} si \; x \leq -2 \\ 2x + 3 \; si \; -2 < x \leq 1 \\ \left(\dfrac{1}{5}\right)^{2-x} \quad si \; x > 1 \end{cases}$$

k) Analizar la continuidad de las siguientes funciones.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} si \; x \neq 1 \\ 3 \; si \; x = 1 \end{cases}$$

L) Una empresa fabrica engranajes de acero. El costo de fabricación varía según la cantidad producida:

- $50 por engranaje para una producción de 100 engranajes o menos.
- $45 por engranaje para una producción de más de 100 engranajes, pero no más de 200.
- $40 por engranaje para una producción de más de 200 engranajes, pero no más de 300.
- $35 por engranaje para una producción de más de 300 engranajes.

La función de costo (f(x)) en función de la cantidad (x) de engranajes producidos es:

$$f(x) = \begin{cases} 50x \; si \; 0 < x \leq 100 \\ 45x \; si \; 100 < x \leq 200 \\ 40x \; si \; 200 < x \leq 300 \\ 35x \; si \; x > 300 \end{cases}$$

2.9 LÍMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO

El límite fundamental trigonométrico siguiente es la base para resolver cualquier límite que incluya funciones trigonométricas.

$$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$$

2.9.1 DEMOSTRACIÓN DEL LÍMITE TRIGONOMÉTRICO FUNDAMENTAL

ISBN: 978-631-6557-36-0

Partiendo del círculo trigonométrico de radio 1 se pueden sacar las siguientes áreas:

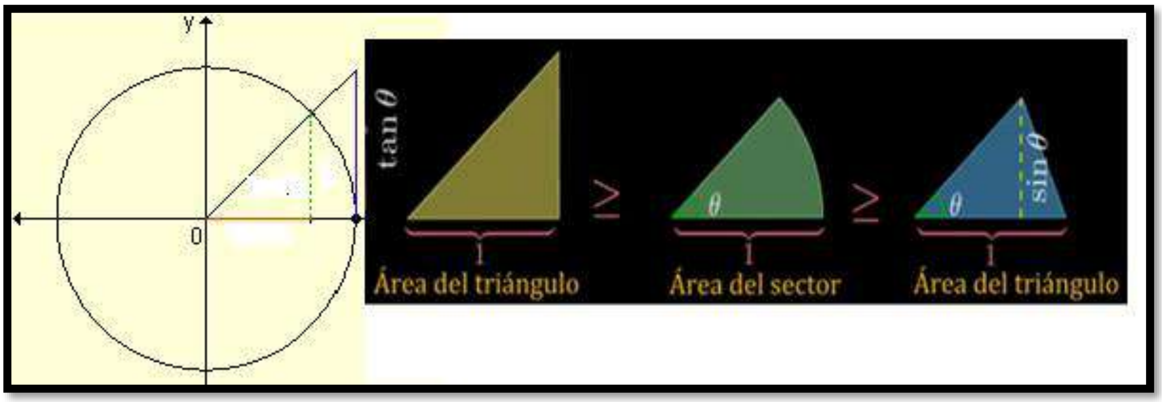


Figura. 2.33 Áreas y ángulos de una circunferencia

$$\frac{tan\ \theta}{2} \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{sin\ \theta}{2}$$

Las áreas de cada figura serán

$$\left(\frac{tan\ \theta}{2} \geq \frac{\theta}{2} \geq \frac{sin\ \theta}{2}\right) * 2 = \tan\theta \geq \theta \geq \sin\theta$$

Se multiplica por 2 a toda la expresión

$$\frac{\left(\frac{sin\ \theta}{cos\ \ \theta} \geq \theta \geq sin\ \theta\right)}{\sin\theta}$$

Dividir para sin θ

$$\frac{1}{cos\ \ \theta} \geq \frac{\theta}{sin\ \ \theta} \geq 1$$

Invertir todos los términos matemáticamente

$$\cos\theta \leq \frac{sin\ \ \theta}{\theta} \leq 1$$

Aplicar el teorema del encaje

$$Si\ h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

Se escoge un valor dentro del dominio x=c

$$h(x) = g(x) = L$$

Si los limites extremos cumplen con esta condición

$$f(x) = L$$

Entonces el límite de la función intermedia también lo es.

$$cos\theta = 1 \quad \dots \quad 1 = 1$$

Aplicando este teorema a nuestro caso

$$\lim_{\theta\to0}\frac{sin\ \ \theta}{\theta}=1$$

LQQD

ISBN: 978-631-6557-36-0

2.9.2 RESOLUCION CON EL LÍMITE FUNDAMENTAL TRIGONOMÉTRICO

Al igual que en los casos anteriores estos límites se basan en el algoritmo para la resolución, sin embargo, en el caso de presentar indeterminaciones es necesario levantarlas, pero con la ayuda en su gran mayoría de identidades trigonométricas conocidas por el lector.

2.9.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$	Identidad trigonométrica fundamental
$tg\ \theta = \frac{sen\ \theta}{cos\ \ \theta};\ ctg\ \theta = \frac{cos\ \theta}{sen\ \ \theta}\ ;$ $csc\theta = \frac{1}{sen\ \ \theta};\ \ sec = \frac{1}{cos\ \theta}$	Identidades básicas
$sen^2\theta = 1 - cos^2\theta; sec^2\theta\ = 1 + tg^2\theta$ $csc^2\theta\ = 1 + ctg^2\theta$	Identidades Pitagóricas
$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha.cos\beta \pm sen\beta.cos\alpha(\alpha \pm \beta) = cos\alpha.cos\beta \mp sen\alpha.sen\beta$ $tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$	Identidades de la suma y resta de ángulos
$sen(2\theta) = 2sen\theta cos\theta$ $cos(2\theta) = cos^2\theta - sen^2\theta$	Identidades Ángulo doble
$sen\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\ \theta}{2}}$	

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cos\,\theta}{2}}$$

Identidades Ángulo mitad

$$sen\alpha.sen\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$cos\alpha.cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]\alpha.cos\beta$$
$$=\frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]$$

Identidades de producto a suma

$$sen\alpha+sen\beta=2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$sen\alpha-\ sen\beta=2sen\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$cos\alpha+cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\alpha-\ cos\beta$$
$$=-2cos(\frac{\alpha+\beta}{2}).sen(\frac{\alpha-\beta}{2})$$

Identidades de suma a producto

2.9.4 EJERCICIOS RESUELTOS DE LIMITES TRIGONOMETRICOS

a) Resuelva el siguiente limite trigonométrico

$$\lim_{w\to 0}\frac{w^2}{cosw-1}$$

Planteamiento

$$\lim_{w\to 0}\frac{w^2}{cosw-1}=\frac{0}{0}$$

Evaluar el límite cuando w→ 0

$$\lim_{w\to 0}\frac{w^2}{cosw-1}.\frac{cosw+1}{cosw+1}$$

Levantamiento de la indeterminación con la multiplicación del conjugado

$$\frac{w^2(cosw+1)}{-sen^2w}=-1(\cos(0)+1)=-2$$

Solución

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Resuelva el siguiente limite trigonométrico

$$\lim_{x \to 0} \frac{\boldsymbol{sen\ 3x}}{\boldsymbol{tan\ 4x}}$$ Planteamiento

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\ 3x}{\frac{sen\ 4x}{cos\ cos\ 4x}}$$ Trasformación en senos y cosenos

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x \frac{sen3x}{3x} .\ cos4x}{4x \frac{sen4x}{4x}}$$ Formación del límite trigonométrico fundamental

$$\lim_{x \to 0} \frac{3}{4} cos4x = \frac{3}{4}$$ Solución

c) Resuelva el siguiente limite trigonométrico

$$\lim_{w \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos2w}{cosw - senw}$$ Planteamiento

$$\lim_{w \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos2w}{cosw - senw} = \frac{0}{0}$$ Evaluar el límite cuando w→ $\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{w \to \frac{\pi}{4}} \frac{cos^2 w - sen^2 w}{cosw - senw}$$ Levantamiento de la indeterminación con identidades del ángulo doble

$$\lim_{w \to \frac{\pi}{4}} \frac{(cosw - senw)(cosw + senw)}{(cosw - senw)}$$ Diferencia de cuadrados

$$\lim \left(_{w \to \frac{\pi}{4}} cosw + senw\right)$$ Eliminación de términos en común

$$\lim \left(_{w \to \frac{\pi}{4}} cos\frac{\pi}{4} + sen\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$ Solución

2.9.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LIMITES TRIGONOMETRICOS

a) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x}{\sin(3x)}$$

b) Encontrar el límite de la siguiente función:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x^3}$$

c) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos(x)}{\sqrt{x}}$$

d) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-x}{x^2}$$

e) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x^2}$$

f) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\tan(4x)}{\sin(2x)}$$

g) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0} \cos(3x) - \frac{\cos(x)}{x^2}$$

h) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0} sen(5x) - \frac{sen(3x)}{sen(x)}$$

i) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x+a)}{x} - \frac{\cos(x-a)}{x}$$

j) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(ax)}{sen(bx)}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

k) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x+a) - sen(x-a)}{x}$$

l) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$$

m) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(3x)}{x}$$

n) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(4x)}{\sin(2x)}$$

o) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x)}{x^3}$$

p) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(2x) - 2\tan(x)}{x^3}$$

q) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(x) - \cos(2x)}{x^2}$$

r) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{x^3}$$

s) Encontrar el límite de la siguiente función:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin^2(x) - \sin(2x)}{x^3}$$

t) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2}$$

u) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x) - 2\sin(x) + x}{x^3}$$

v) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos(5x) - 1 + \frac{25x^2}{2}}{x^4}$$

w) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(3x) - 3\sin(x)}{x^3}$$

x) Encontrar el límite de la siguiente función:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\tan(4x) - 4\tan(x)}{x^3}$$

2.10 LÍMITE ALGEBRAICO FUNDAMENTAL

Se puede resolver la forma indeterminada 1^∞ con el límite fundamental algebraico, sea la forma:

$$(1 + \frac{1}{n})^n$$

Donde n es una variable creciente

La función $(1 + \frac{1}{n})^n$ tiene su límite comprendido entre 2 y 3 cuando n tiende al infinito, como la función es creciente y acotada se obtiene que:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

La forma indeterminada 1^{∞} se resuelve con el límite fundamental algebraico, ya que se está analizando el $\lim_{x\to a} f(x)^{h(x)}$, se obtiene que el $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to a} h(x) = \infty$, sabemos que $f(x) = 1 + a(x)$ donde $a(x) \to 0$ cuando $x \to a$ entonces:

$$\lim_{x\to a} [(1 + a(x))^{\frac{1}{a(x)}}]^{a(x)*h(x)} = e^{\lim_{x\to a} a(x)h(x)}$$

2.10.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE LÍMITE ALGEBRAICO FUNDAMENTAL

- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{x+a}{x-a} + 1\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\frac{2a}{x-a}x}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{2a}{1-\frac{a}{x}}} \qquad = e^{2a}$$

- $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{\frac{1-x^3}{x}}}$

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{x^3+2x+3}{x^3+4} - 1\right)^{\frac{1-x^3}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2x-1}{x^3+4}\right)^{\frac{1-x^3}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2x-1}{x^3+4}\right)^{\frac{x^3+4}{2x-1}}\right]^{\frac{(2x-1)(1-x^2)}{(x^3+4)x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)(1-x^3)}{(x^3+4)x}}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)(1-x^2)}{(x^3+4)x}} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}-1\right)}{1-\frac{a}{x^3}}} = e^{2(-1)} = e^{-2}$$

- $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} [1 - sen(3x)]^{\frac{1}{2x}}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x\to 0}\left[[1-sen(3x)]^{\frac{1}{-sen3x}}\right]^{\frac{-sen3x}{2x}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{sen(3x)}{3x}\left(-\frac{3}{2}\right)} = e^{-\frac{2}{3}}$$

- $\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^m$

$$\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{m}{x}} =$$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x)^{\frac{m}{x}}\left(\frac{x}{e^x}-1\right)^{\frac{m}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0}e^x\left[\left(\frac{x}{ex}+1\right)^{\frac{ex}{x}}\right]^{\frac{m}{e^x}}$$

$$\lim_{x\to 0}e^m e^m = e^{2m}$$

- $\lim_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$

$$\frac{lim}{x\to 0}\,(e^x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{ex}+1\right)^{\frac{1}{x}} = \frac{lim}{x\to 0}\;e\left[\left(\frac{x}{ex}+1\right)^{\frac{ex}{x}}\right]^{\frac{1}{ex}} = e.e^{\frac{lim}{x\to 0}\frac{1}{ex}} = e.e^1 = e.e$$

- $\frac{lim}{x\to\infty}\;\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{a+x}} \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{(x+a)^{x+a}}{(x+a+b)^{x+b}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a} . \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x+a}{x+a+b}\right)^{x+a}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{x+a}{x+a+b}-1\right)^{x+a} . \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{x+a}{x+a+b}-1\right)^{x+b}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{x+a-x-a-b}{x+a+b}-1\right)^{x+a} . \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{x+a-x-a-b}{x+a+b}-1\right)^{x+b}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left[\left(1+\frac{b}{x+a+b}\right)^{\frac{x+a+b}{b}}\right]^{\frac{-b(x+a)}{x+a+b}} . \lim_{x \to \infty} \left[\left(1 + \frac{b}{x+a+b}\right)^{\frac{x+a+b}{a}}\right]^{\frac{-a(x+a)}{x+a+b}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-b(x+a)}{x+a+b}} . e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-a(x+a)}{x+a+b}} = e^{-b}e^{-a}$$

$$= e^{-(a+b)}$$

- $$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\left[\sqrt[\sqrt{3}]{1+sen(\sqrt{3x})}\right]^{\frac{1}{(sen\sqrt{3x})}}}$$

$$\lim_{x \to 0}\left[1+sen(\sqrt{3x})\right]^{\frac{1}{\sqrt{3}(sen\sqrt{3x})}} = \lim_{x \to 0}\left[\left[(1+sen(\sqrt{3x})\right]^{\frac{1}{(sen\sqrt{3x})}}\right]^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = e^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

- $$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{\sqrt{16xsen\left(\frac{1}{4x}\right)}}\right]^{xsen\frac{1}{3x}}}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4}{\sqrt{16xsen\left(\frac{1}{4x}\right)}}\right]^{xsen\frac{1}{3x}} = \lim_{h\to 0}\left[\frac{4}{\sqrt{\frac{4}{n}sen(n)}}\right]^{\frac{1}{4n}sen\frac{4n}{3}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{2}{\sqrt{\left(\frac{sen(n)}{n}\right)}}\right]^{\frac{1}{3}\frac{sen\left(\frac{4h}{3}\right)}{\frac{4h}{3}}} = 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{In(x+h)-In(x)}{h}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{In(x+h)-In(x)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{In\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h} = \lim_{x\to 0}\frac{In\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\,In\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} = \frac{1}{x}\,Ine = \frac{1}{x}$$

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+tg(x)}{1-tg(x)}\right]^{\frac{1}{sen(x)}}$

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{1+tg(x)}{1-tg(x)}-1\right]^{\frac{1}{sen(x)}} = \lim_{x\to 0}\left[1+\frac{2tg(x)}{1+tg(x)}\right]^{\frac{1}{sen(x)}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{2tg(x)}{1-tg(x)}\right]^{\frac{1+tg(x)}{2tg(x)}}\right\}^{\frac{2tg(x)}{sen(x)(1+tg(x))}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2tgx}{x}}{\frac{sex}{x}(1+tg(x))}}$$

$$= e^{\frac{2}{1}} = e^2$$

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1+tg(x)}{1-sen(x)}\right]^{\frac{1}{sen(x)}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{lim}{x\to 0}\left[\frac{1+tg(x)}{1-sen(x)}\right]^{\frac{1}{sen(x)}} = \frac{lim}{x\to 0}\left[1+\frac{1+tg(x)}{1-sen(x)}-1\right]^{\frac{1}{sen(x)}}$$

$$= \frac{lim}{x\to 0}\left[1+\frac{tg(x)+sen(x)}{1-sen(x)}\right]^{\frac{1}{sen(x)}}$$

$$= \frac{lim}{x\to 0}\left\{\left[1+\frac{tg(x)+sen(x)}{1-sen(x)}\right]^{\frac{1-sen(x)}{tg(x)-sen(x)}}\right\}^{\frac{tg(x)+sen(X)}{sen(x)(1-sen(x))}}$$

$$= e^{\frac{lim}{x\to 0}\frac{sen(x)+1}{1-sen(x)}} = e^{\frac{lim}{x\to 0}\frac{tg(x)+sen(x)+1}{1-sen(x)}-\frac{1}{sen(x)}} = e^{\frac{lim}{x\to 0}\frac{1+\cos(x)}{\cos(x)(1-sen(x))}}$$

$$= e^{\frac{1+1}{1}} = e^{2}$$

- $\frac{\boldsymbol{lim}}{\boldsymbol{x\to 0}}\left[\sqrt{\boldsymbol{2-\sqrt{\cos(x)}}}\right]^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2}}}$

$$\frac{lim}{x\to 0}\left(1+1-\sqrt{\cos(x)}\right)^{\frac{1}{2x^2}} = \frac{lim}{x\to 0}\left\{\frac{sen^2(x)}{\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right][1+\cos(x)]}\right\}^{\frac{1}{2x^2}}$$

$$= \frac{lim}{x\to 0}\left\{\left\{\frac{sen^2(x)}{\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right][1+\cos(x)]}\right\}^{\frac{\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right][1+\cos(x)]}{sen^2(x)}}\right\}^{\frac{sen^2(x)}{2x^2\left[1+\sqrt{\cos(x)}\right](1+\cos x)}}$$

$$= e^{\frac{lim}{x\to 0}\frac{sen^2x}{x^2}\cdot\frac{1}{2(1+\sqrt{cosx})(1+cosx)}} = e^{1\left(\frac{1}{1(1+1)(1+1)}\right)} = e^{\frac{1}{8}}$$

- $\frac{\boldsymbol{lim}}{\boldsymbol{x\to 0}}\ [\boldsymbol{\cos(x)}]^{\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^2}}}$

$$\frac{lim}{x\to 0}\ (1+1-\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \frac{lim}{x\to 0}\left(1+2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{lim}{x\to 0}\left(\left(1+2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right)^{\frac{2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}} = e^{\frac{lim}{x\to 0}2\left(\frac{sen\left(\frac{x}{2}\right)}{2\frac{x}{2}}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}}$$

- $\frac{\boldsymbol{lim}}{\boldsymbol{x\to 0}}\left(\frac{(\boldsymbol{e^x+x})^{\boldsymbol{tg(x)}}}{(\boldsymbol{1sen(x)})^{\boldsymbol{x}}}\right)^{\frac{\boldsymbol{ctg(x)}}{\boldsymbol{x}}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x+x)^{\frac{1}{x}}}{(1+sen(x))^{ctg(x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{[e^x(1+\frac{x}{e^x})^{\frac{1}{x}}}{(1+sen(x))} \frac{\cos(x)}{senx} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{[\left(1+\frac{x}{e^x}\right)^{\frac{ex}{x}}]^{\frac{x\,1}{exx}}}{\left[(1+sen(x))^{\frac{1}{senx}}\right]^{\cos(x)}}} = e\,.\frac{e}{e} = \mathrm{e}$$

2.10.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LPIMITE ALGEBRAICO FUNDAMENTAL

a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{3x+1}\right)^{x}$

b) $\lim\limits_{x\to 1} (1+tg\pi x)^{\frac{1}{sen\pi x}}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+2}\right)^{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x^2)^{\frac{1}{tg^2 x}}$

e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt[3x]{a}+\sqrt[3x]{n}}{2}\right)^{x}$

f) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+tg^2\sqrt[3]{3})^{\frac{5}{x}}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+tg^2\sqrt[3]{3})^{\frac{5}{x}}$

h) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

i) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$

j) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+2x+3}{x^3+4}\right)^{x^2+2}$

k) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+3}{3}}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos(x)+sen(x))^{\frac{1}{x}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{sen}{x}}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt[x]{1-2x}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

ISBN: 978-631-6557-36-0

CAPITULO 3

3. LA DERIVADA

3.1 DEFINICION DE LA DERIVADA

Tomando en cuenta la función real de la variable real $y = f(x)$, si $x \in D_f$, entonces la derivada de la función "f" con respecto a "x" su definición será la siguiente expresión:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

1. El proceso de encontrar la derivada se lo conoce como "diferenciación" (Bronceado, 2002).

3.2 INTERPRETACION FÌSICA Y GEOMETRICA DE LA DERIVADA

Tomando en cuenta una curva C: $y = f(x)$ y un punto fijo de la misma $P_0(x_0, y_0)$, siendo L, la recta secante que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ y también por el punto $M(x, y)\epsilon C$.
La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_0 y M es:

$$mL_s = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}, x \neq x_0$$

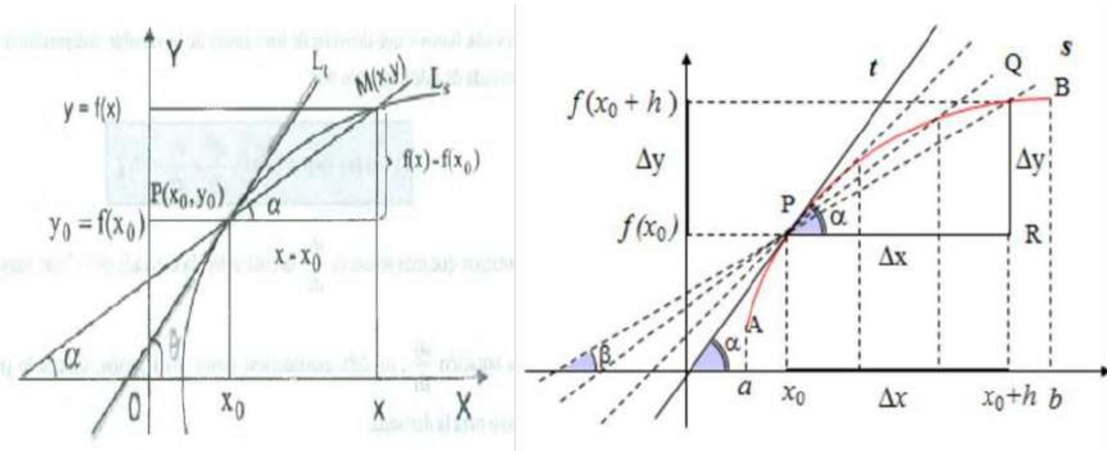


Figura. 3.1 Interpretación de distintas funciones

ISBN: 978-631-6557-36-0

Si el punto $M(x, y)$ se acerca al punto $P_0(x_0, y_0)$ se obtiene como resultado que la variable "x" se aproxima a "x_0" del mismo modo que $\Delta x = x - x_0$ se acerca a cero con lo cual podemos decir que hemos utilizado el concepto de límites.

Si f es una función que depende de la variable independiente "x" entonces a la derivada de la función f le podemos expresar de la siguiente manera:

$$y = f(x) \Rightarrow y' = f(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = D, f$$

La notación que más se utiliza es $\frac{dy}{dx}$ la cual se interpreta de la siguiente manera: la derivada de "y" con respecto a "x".

En la notación $\frac{dy}{dx}$ es un símbolo para la derivada, más no debe ser considerada como una fracción.

Aclaración:

Si $x = x_0 + \Delta x => \Delta x = h$ entonces $h = x - x_0$ y cuando $x \to 0$ se entiende que $h \to 0$, por lo tanto, la definición de la derivada $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ le daremos la forma de:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ donde } x + h \in D$$

La función real de la variable real $y = f(x)$ es diferencial en un punto $x = x_0$ si existe su derivada en dicho punto $f'(x_0)$ existe.

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.3 TABLAS DE DERIVACION

Tablas de derivación

Tabla 2. Derivadas comunes

Función	Derivada
$y = k$	$y' = 0$
$y = x$	$y' = 1$
$y = u(x) + v(x)$	$y' = u'(x) + v'(x)$
$y = ku(x)$	$y' = k * u'(x)$
$y = u(x) * v(x)$	$y' = u'(x) * v(x) + v'(x)u(x)$
$y = \frac{u(x)}{v(x)}$	$y' = \frac{u'(x) * v(x) + v'(x)u(x)}{v^2(x)}$
$y = x^n$	$y' = n * x^{n-1}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x}\log_a e$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x * \ln a$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \tan x$	$y' = \sec x^2$
$y = \cot x$	$y' = -\csc x^2$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$y = \sec x$	$y' = \sec x * \tan x$
$y = \csc x$	$y' = -\csc x * \cot x$
$y = u^v$	$y' = u^{v-1} * u' * v + u^v v'^{\ln u}$

Tabla 3.Derivadas trigonométricas inversas

$y = arc \sin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arc \cos x$	$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = arc \tan x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = arc \cot x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$
$y = arc \sec x$	$y' = \frac{1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}}$
$y = arc \csc x$	$y' = \frac{-1}{\lvert x \rvert \sqrt{x^2-1}}$

Tabla 4.Derivadas Hiperbólicas

$y = \arg sh\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$y = \arg ch\, x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$y = \arg th\, x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = \arg xth\, x$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$
$y = \arg \operatorname{sech} x$	$y' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arg \operatorname{csch} x$	$y' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.4 PROPIEDADES DE LA DERIVADA

Las propiedades fundamentales de la derivada son esenciales para simplificar y facilitar la resolución de los ejercicios, además sirve para aplicar la derivación en el cálculo y análisis matemático (García, & López, 2015). Entre estas podemos resaltar:

a) **Propiedad de la constante:** La derivada de una constante es cero. Permite derivar términos constantes fácilmente.
b) **Propiedad del producto:** La derivada de un producto es el primer factor multiplicado por la derivada del segundo factor, más el segundo factor multiplicado por la derivada del primero. Útil para derivar productos de funciones.
c) **Propiedad del cociente:** La derivada de un cociente es el denominador multiplicado por la derivada del numerador, menos el numerador multiplicado por la derivada del denominador, todo dividido al cuadrado del denominador. Se aplica en derivación de fracciones.
d) **Regla de la cadena**: Permite derivar composiciones de funciones derivando dentro hacia fuera. Muy útil cuando las funciones están anidadas.
e) **Derivadas de funciones elementales:** Las derivadas de potencias, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y otras funciones básicas están bien establecidas y tabuladas.
f) **Derivada de orden superior:** Permite calcular derivadas de derivadas para estudiar concavidad, puntos de inflexión, optimización, etc.
g) **Regla de L'Hôpital:** Da el límite de una razón de funciones derivando numerador y denominador. Aplica con indeterminaciones.

3.4.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADA DE TABLA

a) Resuelva la siguiente derivada:

$$f(x) = -5x + 2$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Para resolver el ejercicio entendemos que, cualquier valor constante será 0 al ser derivado, y aplicamos $k * x$ separando la constante y derivando la función:

$$f\,´(x) = -5\,(x)´ + (2)´$$

$$f´(x) = -5$$

b) Resuelva la siguiente derivada:

$$f(x) = 2x^7 - 3x^6 + 3x^3 - 4x^2 - 7$$

Para resolver el ejercicio es necesario aclarar que al estar separados por + y – podemos resolverlos individualmente, aplicamos la anterior regla $k * x$ separando la constante y derivando la función:

$$f´(x) = 2 * 7x^6 - 3 * 6x^5 + 3 * 3x^2 - 4 * 2x - 0$$

Obteniendo finalmente:

$$f´(x) = 14x^6 - 18x^5 + 9x^2 - 8x$$

c) Resuelva la siguiente derivada:

$$f(x) = \frac{x-3}{2}$$

Aquí podemos aplicar algebra y separar en dos funciones, las cuales al estar separadas por – podemos derivar individualmente facilitando la resolución:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

Ahora simplemente derivamos como un $\frac{1}{2} * x$ y obtendríamos el resultado:

$$f´(x) = \frac{1}{2}(x)´ - 0$$

$$f´(x) = \frac{1}{2}$$

d) Resuelva la siguiente derivada:

$$f(x) = \frac{3}{x^2}$$

Lo más importante aquí es interpretar el ejercicio, al tener la variable x^2 en el denominador, podemos subirla como un x^{-2} de la siguiente manera:

$$f(x) = 3 * x^{-2}$$

Ahora resolvemos la derivada, como siempre sacando el valor constante y resolvemos la función como un x^k, quedándonos:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$f´(x) = 3 * -2x^{-3}$$

$$f´(x) = -6x^{-3}$$

e) Resuelva la siguiente derivada:

$$f(x) = \sqrt{x^3}$$

Al tener un exponente y una raíz, podemos aplicar una propiedad matemática conocida dejándonos la función solamente elevada a un exponente de la siguiente forma:

$$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$$

Ahora tenemos una expresión x^k y la resolvemos sencillamente:

$$f´(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

f) Resuelva la siguiente derivada:

$$f(x) = 7 * e^{x^2+1}$$

Para resolver este ejercicio primero sacamos la constante ya que está multiplicando la expresión, luego procedemos a derivar e^{x^2+1} como cualquier e^x y luego multiplicamos el supuesto valor de x ya derivado:

$$f´(x) = 7 * e^{x^2+1}(x^2 + 1)´$$

$$f´(x) = 7 * e^{x^2+1}(2x)$$

$$f´(x) = 14x * e^{x^2+1}$$

3.4.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DRIVADAS DE TABLA

a) Resuelva la siguiente derivada:

$f(x) = (x^5 - x^3 + 3)^4$

b) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = (x^2 - 2)^4$

c) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = (x - 1)(x + 1)^2$

d) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \sqrt[5]{x^5 - x^3 + 3}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

e) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = e^{x+1}$

f) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = (-3)(e^{x+1})$

g) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \sqrt{e^x}$

h) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln(x)$

i) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \sin(x)$

j) Resuelva la siguiente derivada:
$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x}$$

k) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln(x^2 + 1)$

l) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \sin(x^2)$

m) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = e^{2x}$

n) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = (3x^2 - 2x + 1)^3$

o) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln(x^2 + 1)$

p) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = (x^2 + 1)(e^x)$

q) Resuelva la siguiente derivada:
$$f(x) = \frac{x^3}{e^x}$$

r) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = 5x^x$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.5 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA CON EXPONENTE REAL CUALQUIERA.

La derivada de una función potencia con exponente real cualquiera se puede calcular aplicando la regla de potencias. Si tiene una función de la forma $y = ax^n$, donde a es una constante y n es un exponente real, la derivada $\frac{dy}{dx}$ con respecto a la variable independiente x se puede encontrar utilizando la regla de potencias de la siguiente manera:

$$\frac{dy}{dx} = n \cdot ax^{(n-1)}$$

En esta expresión, n es el exponente real y $ax^{(n-1)}$es la función resultante después de derivar la variable con respecto a x. Esta regla es válida para cualquier exponente real, ya sea positivo, negativo o incluso fraccional. La derivada de una función potencia simplemente implica reducir el exponente por 1 y multiplicar por el exponente original (García, & López, 2015).

3.5.1 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA DE LA FORMA $y = x^n$

Si $f(x) = x^n$ donde n es un número entero positivo, entonces:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Demostración:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Desarrollando por el teorema del binomio a $(x + \Delta x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^n\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

Dividiendo numerador y denominador entre Δx:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x) + \cdots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1} \right]$$

Formulas:

Todos los términos, excepto el primero, tienen un factor Δx, por lo que al pasar al límite y $\Delta x \to 0$, se anulan esos términos y nos queda:

$$f'(x) = nx^{n-1}$$

Es decir:

$$Dx(x^n) = nx^{n-1}$$

La derivada de x^n, siendo n un número entero positivo, es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido en uno.

Ejemplos:

1) En el caso fe la función $f(x) = x^2$ encontramos una novedad importante, pues:

Procedimiento	Explicación
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$	Esta es la definición de la derivada de una función en un punto.
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h}$	Sustituimos f(x) por x^2 y $f(x+h)$ por $(x+h)^2$
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2 - x^2}{h}$	Expandimos el binomio
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2x - h - x^2}{1}$	Simplificamos la expresión en el numerador y cancelamos h en el denominador.
$f'(x) = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x$	Finalmente, tomamos el límite cuando h tiende a cero para obtener la derivada de la función.

ISBN: 978-631-6557-36-0

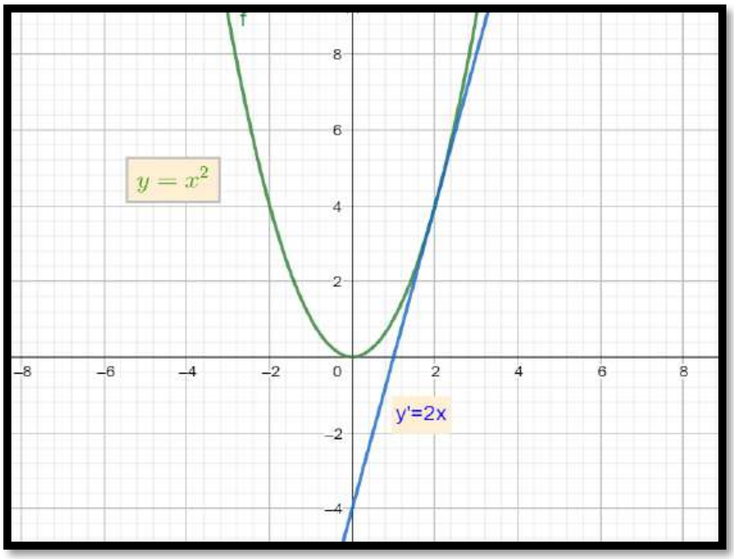


Figura. 3.2 Grafica del ejercicio 1

2) En otro ejemplo, la derivada de y= x^3 es:

Procedimiento

Explicación

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta es la definición de la derivada de una función en un punto.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - (a)^3}{h}$$

Sustituimos f(a)
por a^3 y $f(a+h)$
por $(a+h)^3$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{a^3 + 3a^2h - 3ah^2 + h^3 - a^3}{h}$$

Expandimos el binomio al cubo

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{3a^2h - 3ah^2 + h^3}{h}$$

Simplificamos la expresión en el numerador y cancelamos h
en el denominador.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} 3a^2 - 3a + h^2 = 3a^2$$

Finalmente, tomamos el límite cuando h tiende a cero para obtener la derivada de la función.

ISBN: 978-631-6557-36-0

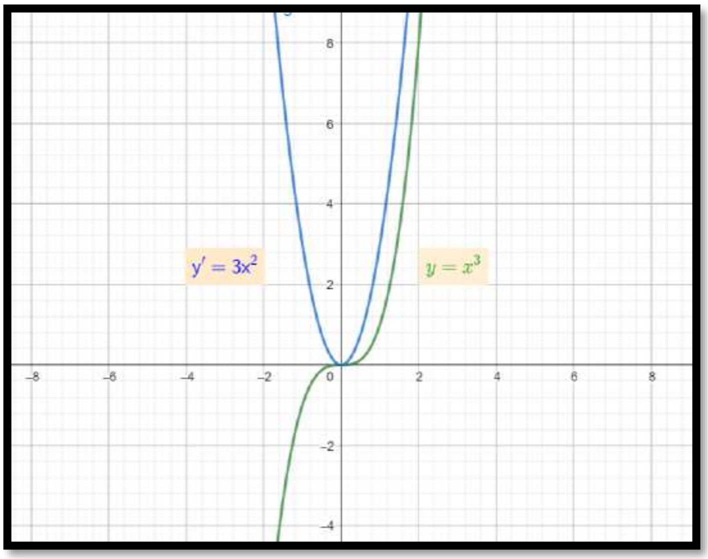


Figura. 3.3 Grafica del ejercicio 2

3.5.2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA DE LA FORMA Y= x^{-n}

Si, en la función, el exponente es un número entero negativo de manera que

$n > 0$, $'n < 0$, se tiene que:

$$Y = x^{-n}$$

De acuerdo con las leyes de los exponentes:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Por tanto:

$$Dx^{-n} = D\frac{1}{x^n}$$

Formulas:

Aplicando la fórmula para la derivada de un cociente y la fórmula para la derivada de una potencia se tiene que:

$$D\frac{1}{x^n} = \frac{-Dx^n}{x^{2n}} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{n-1-2n} = -nx^{-n-1}$$

Es decir:

$$Dx(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejemplo:

1) De manera que si una función es:

$$y = x^{-2}$$

Entonces:

$$y' = -2x^{-2-1}$$

$$y' = -2x^{-3}$$

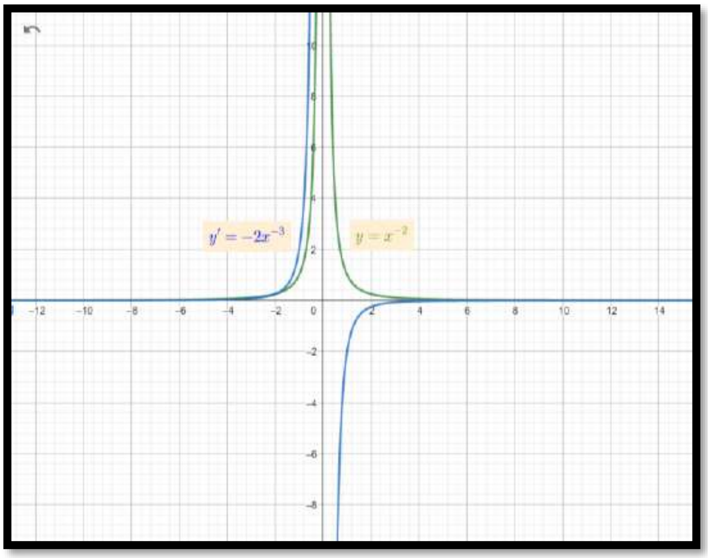


Figura. 3.4 Grafica del ejercicio 1

3.5.3 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA DE LA FORMA $y = \sqrt[n]{x^m}$

Entonces $y = x^{\frac{m}{n}}$. Asimismo, denotamos los radicales como $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$. De este modo, si tenemos la función $f(x) = \sqrt[n]{x^m}$, entonces podemos calcular su derivada utilizando la regla de la derivada de una potencia:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[x^{\frac{m}{n}}] = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$$

Es decir:

$$f'(x) = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{m-1}}}$$

Formulas:

ISBN: 978-631-6557-36-0

Si tomamos en cuenta la regla de la cadena (con u=u(x)), entonces:

$$\frac{d}{dx}\sqrt[n]{x} = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

No es necesario memorizar la fórmula para la derivada de una raíz. Basta con recordar que $\underline{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$ y luego utilizar la regla de la derivada de una potencia. Sin embargo, podemos ahorrar tiempo al calcular las derivadas si nos aprendemos la fórmula.
El caso particular de la raíz cuadrada (con n=2) tiene la derivada:

$$\frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Ejemplo:

1) Si $y = \sqrt[3]{x^2}$ entonces la función se expresa por:

$$y = x^{\frac{2}{3}}$$

Por lo que

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

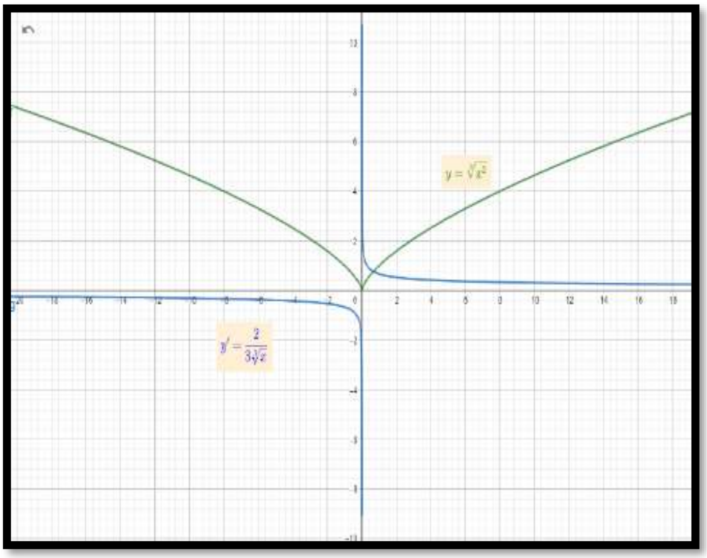


Figura. 3.5 Grafica del ejercicio 1

3.5.4 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS CON UNA POTENCIA

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejemplo 1:

$\boldsymbol{y = x^2}$

$\boldsymbol{y' = 2x^{2-1}}$

$\boldsymbol{y' = 2x}$

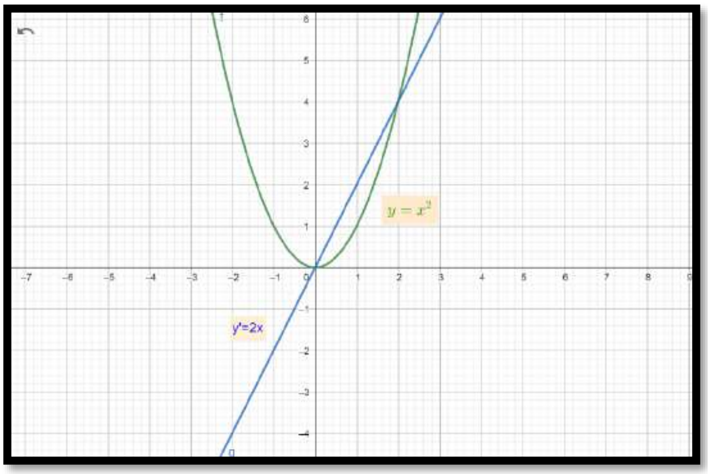


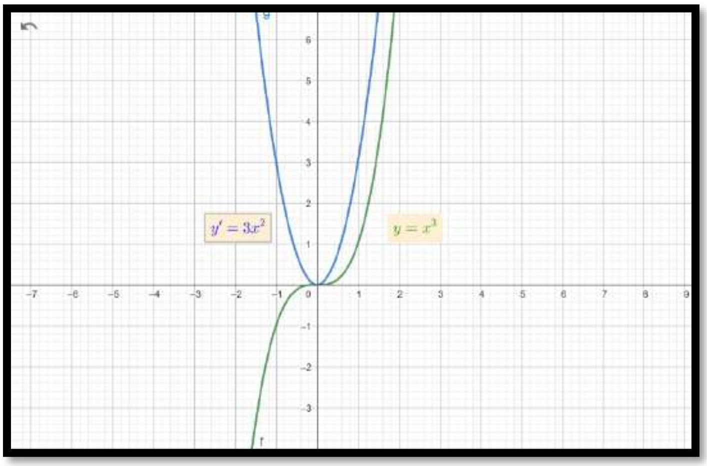
Figura. 3.6 Grafica del ejercicio propuesto 1

Ejemplo 2:

$\boldsymbol{y = x^3}$

$\boldsymbol{y' = 3x^{3-1}}$

$\boldsymbol{y' = 3x^2}$



Ejemplo 3:

$\boldsymbol{y = \sqrt{x}}$

$\boldsymbol{y = x^{\frac{1}{2}}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$

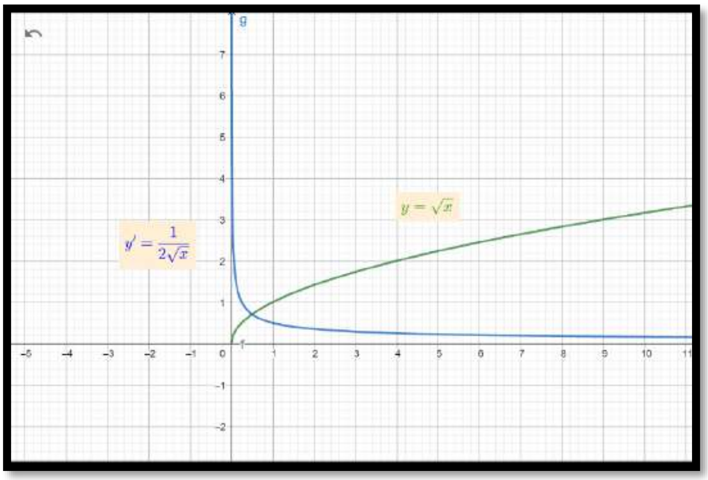


Figura. 3.8 Grafica del ejercicio propuesto 3

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejemplo 4:

$\boldsymbol{y} = \sqrt[4]{\boldsymbol{x^3}}$

$\boldsymbol{y = x^{\frac{3}{4}}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{3}{4} x^{\frac{3}{4}-1}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{4}}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}}$

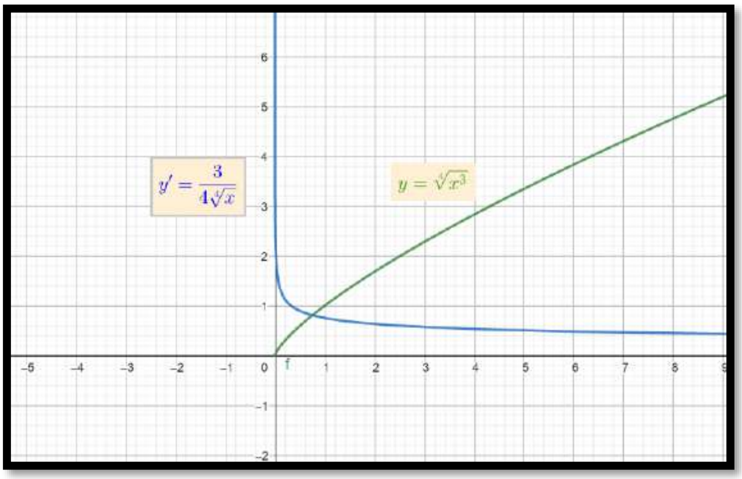


Figura. 3.9 Grafica del ejercicio propuesto 4

Ejemplo 5:

$y = -2x^2$

$\boldsymbol{y' = -2(2)x^{2-1}}$

$\boldsymbol{y' = -4x}$

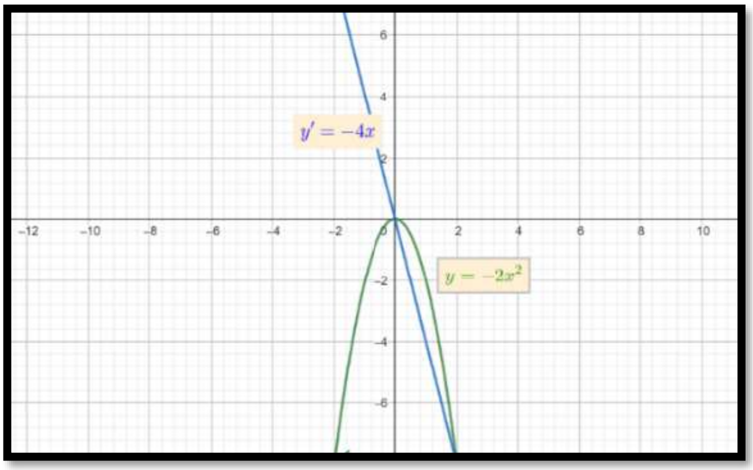


Figura. 3.10 Grafica del ejercicio propuesto 5

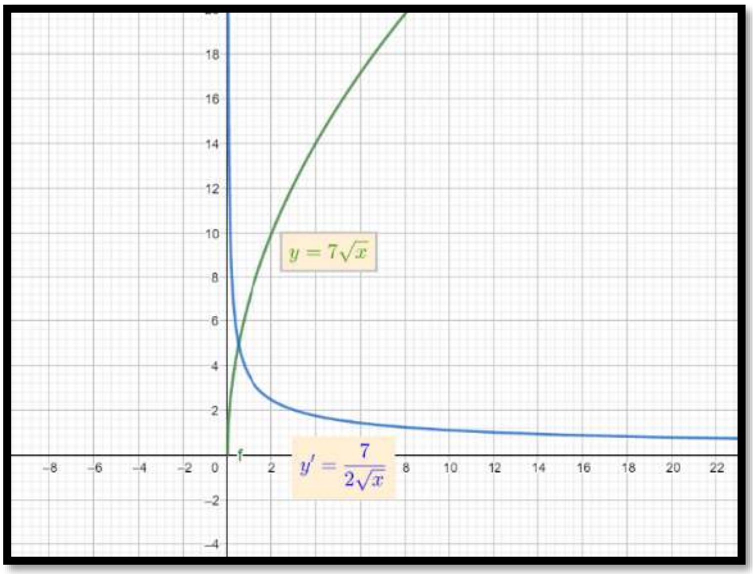
Ejemplo 6:

$\boldsymbol{y} = 7\sqrt{\boldsymbol{x}}$

$\boldsymbol{y = 7x^{\frac{1}{2}}}$

$\boldsymbol{y' = 7(\frac{1}{2}) x^{\frac{1}{2}-1}}$

$\boldsymbol{y' = \frac{7}{2} x^{-\frac{1}{2}}}$



ISBN: 978-631-6557-36-0

$y' = \frac{7}{2\sqrt{x}}$

Figura. 3.11 Grafica del ejercicio propuesto 6

Ejemplo 7:

$y = \frac{2}{3}\sqrt[3]{x}$

$y = \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}}$

$y' = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1}$

$y' = \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}$

$y' = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^2}}$

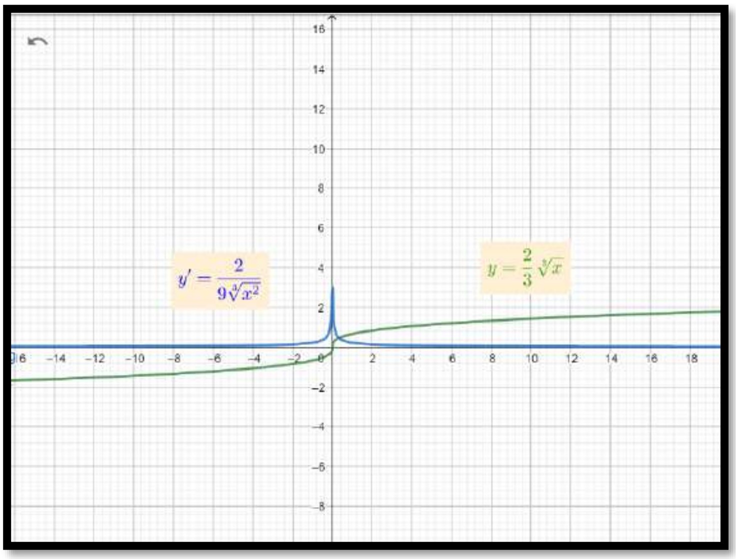


Figura. 3.12 *Grafica del ejercicio propuesto 7*

Ejemplo 8:

$y = 3x^2 - 2x^3$

$y' = 3(2)x^{2-1} - 2(3)x^{3-1}$

$y' = 6x - 6x^2$

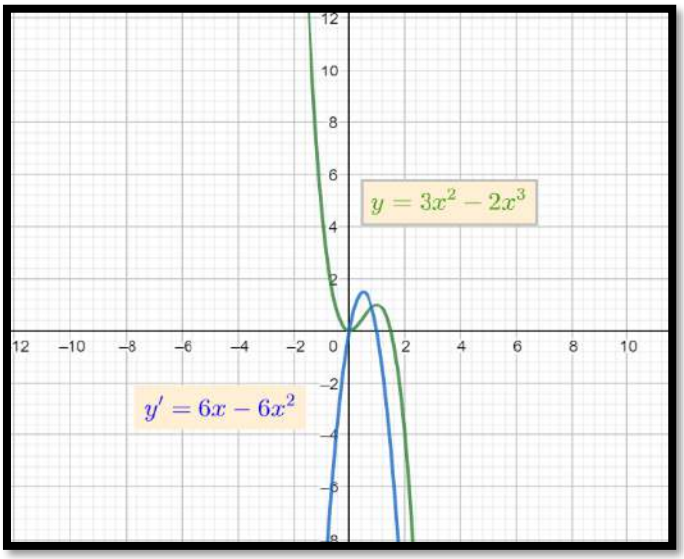


Figura. 3.13 *Grafica del ejercicio propuesto 8*

Ejemplo 9: $y = \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\boldsymbol{y}=\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{-\mathbf{1}}-\mathbf{5}\boldsymbol{x}^{-\mathbf{2}}$$

$$\boldsymbol{y}'=\mathbf{2}(-\mathbf{1})\boldsymbol{x}^{-\mathbf{1}-\mathbf{1}}-\mathbf{5}(-\mathbf{2})\boldsymbol{x}^{-\mathbf{2}-\mathbf{1}}$$

$$\boldsymbol{y}'=-\mathbf{2}\boldsymbol{x}^{-\mathbf{2}}+\mathbf{10}\boldsymbol{x}^{-\mathbf{3}}$$

$$\boldsymbol{y}=-\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{x}^{\mathbf{2}}}+\mathbf{10}\boldsymbol{x}\mathbf{3}$$

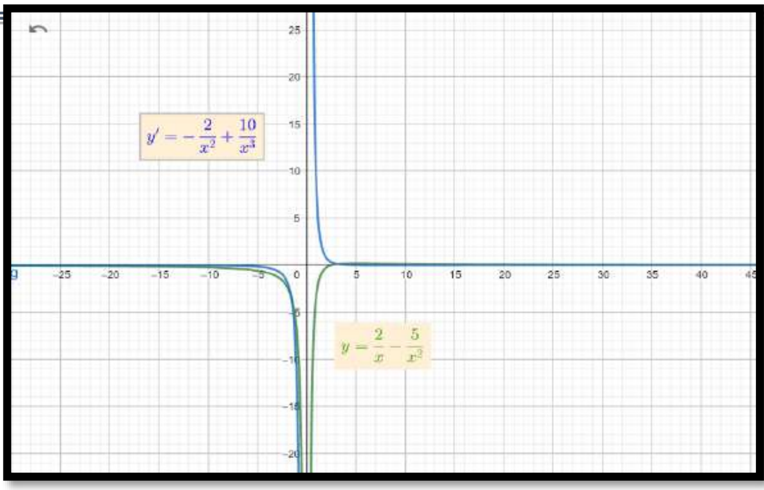


Figura. 3.14 *Grafica del ejercicio propuesto 9*

3.5.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DERIVADA CON UNA POTENCIA

a) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$f(x) = x^3$

b) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$f(x) = x^{-4}$

c) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

d) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$$f(x) = \frac{5}{x^5}$$

e) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$$f(x) = \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}$$

f) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$f(x) = (x^3 + 2x^2 - 4x + 2)^8$

g) Encuentre la derivada de la siguiente función:
$$f(x) = \left(3x + \frac{2}{5}\right)^3$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.6 DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL SIMPLE Y COMPUESTA

Procedimiento	Explicación
$y = x^2$	Para la función
$y' = 2x$	Su derivada es

En la función $y = (2x^3 - 3x^2 + 7)^2$

¿Cuál es su derivada?

Una forma de obtenerla consiste en desarrollar el cuadrado del trinomio, o bien, multiplicar el trinomio por sí mismo para obtener un polinomio de grado seis y después derivar cada uno de sus términos. Si el exponente del trinomio fuera 3, 5 o 20, etc., habría la necesidad de multiplicar el trinomio por sí mismo 3, 5, 20 veces, etc. y después derivar cada término del polinomio resultante. Sin embargo, existe otro procedimiento que simplifica el trabajo y consiste en expresar y como una función de función y aplicar lo que se conoce como regla de la cadena (Granville, 2003).

3.7 REGLA DE LA CADENA

Si y es una función de u, $y = f$ (u), y DuY existe y si u es una función de x, u = g (x) y Dxu existe, entonces y es una función de x donde DxY existe y se define por:

$$\boldsymbol{DxY = DuY \cdot Dx\,u}$$

En esta expresión:

DxY indica la derivada de y respecto a x.

DuY indica la derivada de y respecto a u.

Dxu indica la derivada de u respecto a x.

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejemplos 1:

En la función $y = (2x^3 - 3x^2 + 7)^2$

Procedimiento	Explicación
$y = (2x^3 - 3x^2 + 7)^2$	Tenemos la función
$2x^3 - 3x^2 + 7 = u$ $y = f(u) = (u)^2$ $u = g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$	Si hacemos $2x^3 - 3x^2 + 7 = u$ donde u es una nueva variable llamada variable intermedia, se tiene que:
$y = f(g(x))$	Es una función compuesta ya que se trata de una función de función.
DxY = DuY • Dxu = $2u(6x^2 - 6x)$	Aplicamos la regla de la cadena a esta función
DxY = DuY • Dxu = $2(2x^3 - 3x^2 + 7)(6x^2 - 6x)$	Finalmente, teniendo como resultado al sustituir las funciones

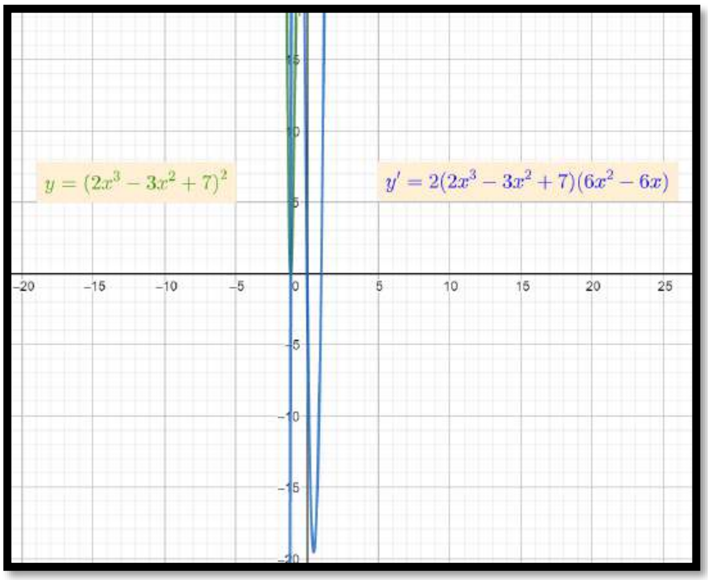


Figura. 3.15 Grafica de una función y su derivada

Esto significa que la derivada de la potencia de una función es igual al producto del exponente por la función elevada al exponente disminuido en uno y por la derivada de la función.

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejemplo:

Dada $y = (2x^3 - 3x^2 + 7)^5$ hallar DxY.

Procedimiento	Explicación
$y = (2x^3 - 3x^2 + 7)^5$	Tenemos la función
$y = (u)^5 \; donde \; u = 2x^3 - 3x^2 + 7$	Considerando y como una función de u, donde u es una función de x, se tiene que
DxY=DuY•Dxu=$5u^4(6x^2 - 6x)$	Aplicamos la regla de la cadena a esta función
$=5(2x^3 - 3x^2+7)^4(6x^2 - 6x)$	Finalmente, teniendo resultado al resolver las funciones

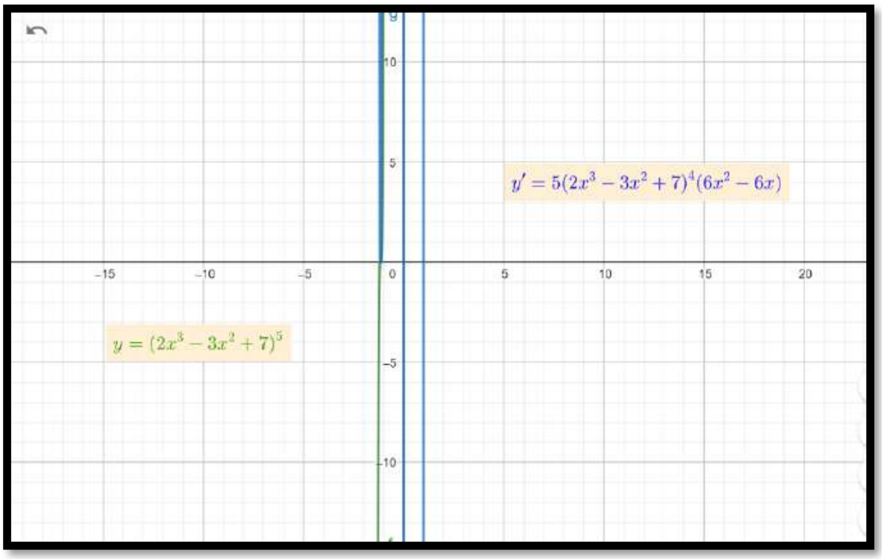


Figura. 3.16 Grafica de una función y su derivada

Ejemplo1:

Dada $f(x) = (\frac{1-2x}{1+3x})^4$ encontrar $f'(x)$.

Solución:

Aplicando la regla de la cadena se tiene que:

Procedimiento	Explicación
$f(x) = (\dfrac{1-2x}{1+3x})^4$	Tenemos la función
$\mathrm{f(x)} = 4(\dfrac{1-2\mathrm{x}}{1+3\mathrm{x}})^3 \cdot \dfrac{(1+3x)(-2)-(1-2x)(3)}{(1+3x)^2}$	Simplifica la expresión original

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$f'(x) = 4\left(\frac{1-2x}{1+3x}\right)^3 \cdot \frac{-2-6x-3+6x}{(1+3x)^2}$$

Encontramos la derivada

$$f'(x) = 4\left(\frac{1-2x}{1+3x}\right)^3 \cdot \frac{-2-6x-3+6x}{(1+3x)^2}$$

Desarrollaros internamente aplicando la regla del producto

$$f'(x) = 4\left(\frac{1-2x}{1+3x}\right)^3 \cdot \frac{-5}{(1+3x)^2}$$

Sustituimos la derivada en la expresión original

$$f'(x) = \frac{-20(1-2x)^3}{(1+3x)^5}$$

Finalmente, teniendo resultado al resolver las funciones

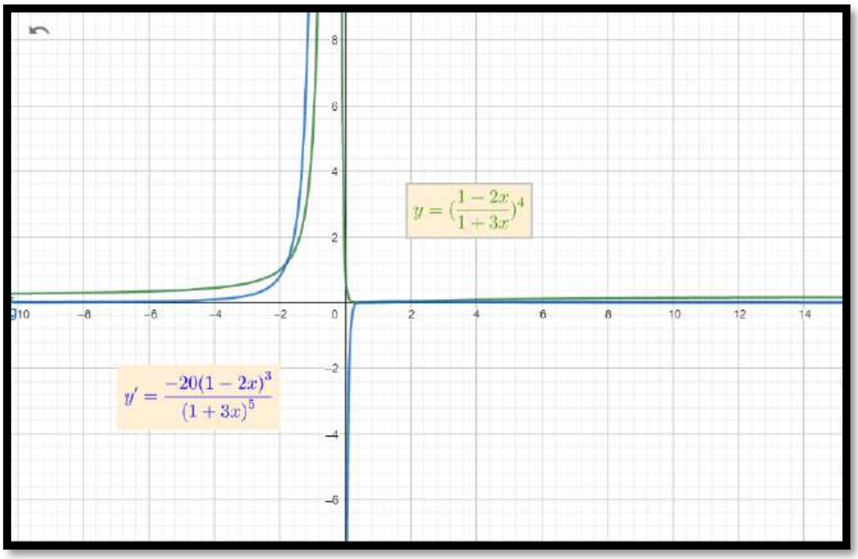


Figura. 3.17 Grafica de una función y su derivada

Ejemplo 2:

Dada $f(x) = (2x-1)^3(2x+3)^2$ encontrar $f'(x)$

Procedimiento

$f(x) = (2x-1)^3(2x+3)^2$

Explicación

Tenemos la función

$g(x) = (2x-1)^3 \; y \; h(x) = (2x+3)^2$

Considerando f como el producto de dos funciones g y h, donde

ISBN: 978-631-6557-36-0

$f'(x) = g(x)\,h'(x) + g'(x)\,h(x)$	Y utilizando la fórmula para el producto de dos funciones:
$f'(x) = (x^2-1)^3[2(2x+3)(2)] + (2x+3)^2[3(x^2-1)^2(2x)]$	Donde g'(x) y h'(x) se obtiene por la regla de la cadena.
$f'(x) = (x^2-1)^3(4)(2x+3) + (2x+3)^2 6x(x^2-1)^2$	Simplificando:
$f'(x) = (x^2-1)^2(2x - 3)[(x^2-1)(4) + (2x+3)(6x)]$	Sacando factor común:
$f'(x) = (x^2-1)^3(2x+3)(4x^2-4+12x^2+18x)$	Efectuando operaciones:
$f'(x) = (x^2-1)^3(2x+3)(16x^2+18x-4)$	Finalmente, teniendo resultado al resolver las funciones

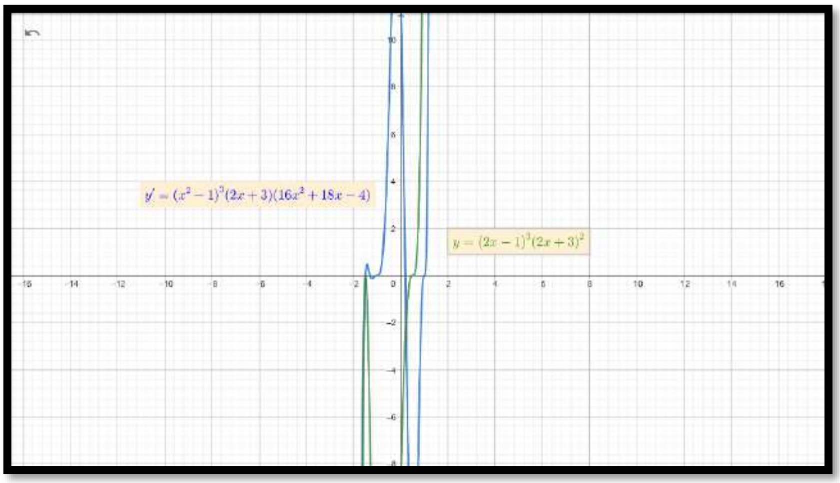


Figura. 3.18 Grafica de una función y su derivada

3.7.1 EJERCICIOS PROPUESTO DE DERIVADA CON LA REGLA DE LA CADENA

ISBN: 978-631-6557-36-0

a) $y = (2x + 1)^2$

b) $y = (x + 2)^2$

c) $y = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$

d) $y = (x^3 - 3x^2 + 2x)^5$

e) $y = \ln(3x^2 - 1)$

f) $y = e^{3x^2+1}$

g) $y = \cos(x^3 - 9)$

h) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 2x}$

i) $y = \sec^5(x)$

j) $y = \log_7(x^3 + e^x)$

k) $y = \cot^{-1}(\frac{x-1}{x+2})$

l) $y = \tan^2(e^{3x})$

m) $y = \sin(2x^2 + 3x)$

n) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

o) $y = \frac{\sin(3x)}{x^2+1}$

p) $y = (3x^2 + 4x + 8x)\sqrt{x - 1}$

q) $y = \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

r) $y = \left(\frac{x^2+3x+5}{2x-1}\right)^5$

s) $y = \frac{4x+6}{\sqrt{x^2+3x+4}}$

t) $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$

u) $y = (3x^2 + 2x + 1)^4$

v) $y = \sqrt{5x^2 - 3x + 2}$

w) $y = \frac{(2x^2+3x+1)^3}{x}$

x) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

y) $y = (2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)^4$

z) $y = (3x^2 + 2x + 1)^{1/3}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.8 DERIVADA DE LA FUNCIÓN Y=a^u

Demostración:

Tomando logaritmos naturales en los dos miembros de la igualdad

Procedimiento	Explicación
$ln\ (y)\ = ln\ \boldsymbol{a}\hat{}\boldsymbol{u}$	Tenemos la función
$ln\ (y) = u * \ln\ (a)$	Sabemos que
$\frac{1}{y} DxY = ln\ a\ Dx$	Obtenemos
DxY=y ln a Dx	Multiplicando por y se obtiene:
DxY= $a^u\ ln\ a\ Dx\ u$	Sustituyendo y por a^u se ontiene:
DxY=$a^x\ ln\ a\ Dx\ X$	Si en esta fórmula se hace u=x, es decir, y=$e^x, entonces$:
$a^x ln\ a\ (1)$	Aplicamos la operación
$a^x ln\ a$	Finalmente, teniendo resultado al resolver las funciones

Realice la derivación de y=5^x

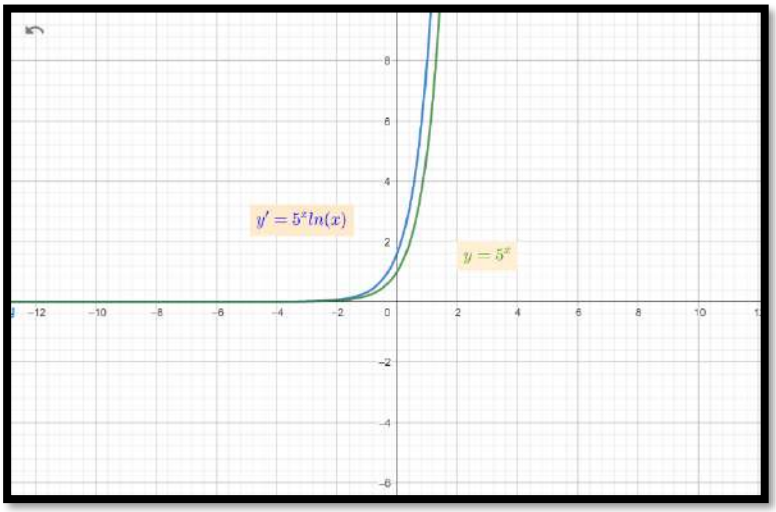


Figura. 3.19 Grafica de una función y su derivada

3.9 DERIVADA DE LA FUNCIÓN Y=e^u

Demostración:

ISBN: 978-631-6557-36-0

Procedimiento	Explicación
$y = a^u$	Tenemos la función
DxY=$a^u \ ln\ u\ Dx\ u$	Se tiene como derivada
DxY=$e^u\ Dx\ u$	Si a=e, ln a= ln e=1y la formula anterior de la derivada se convierte en:

Ejemplo:

$y = e^{2x}$	
$y = e^{2x}(2x)'$	Se deriva la parte del exponente
$y = e^{2x}(2)$	Finalmente, teniendo resultado al resolver las funciones
$y = 2e^{2x}$	Solución

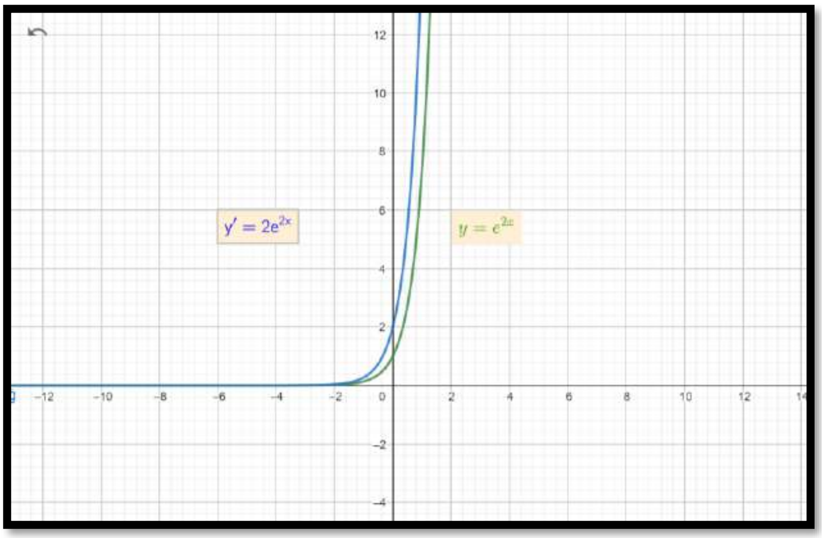


Figura. 3.20 Grafica de una función y su derivada

3.10 DERIVADA DE LA FUNCIÓN Y=e^x

Demostración:

Exponencial con base "e", es igual a la misma función multiplicada por la derivada del exponente.

Procedimiento | Explicación

ISBN: 978-631-6557-36-0

y=$\boldsymbol{e^u}$	Función
$\frac{d}{dy}$=$\boldsymbol{e^u}$Dx u	Tiene como derivada
$\frac{d}{dy}$= $\boldsymbol{e^x}\,\frac{d}{dx}$	Si en esta fórmula se hace u=x, es decir **y=$\boldsymbol{e^x}$**, entonces:
$\boldsymbol{e^x} \cdot 1$	Multiplicamos por la unidad
$\boldsymbol{e^x}$	Demostrando $\boldsymbol{e^x}$

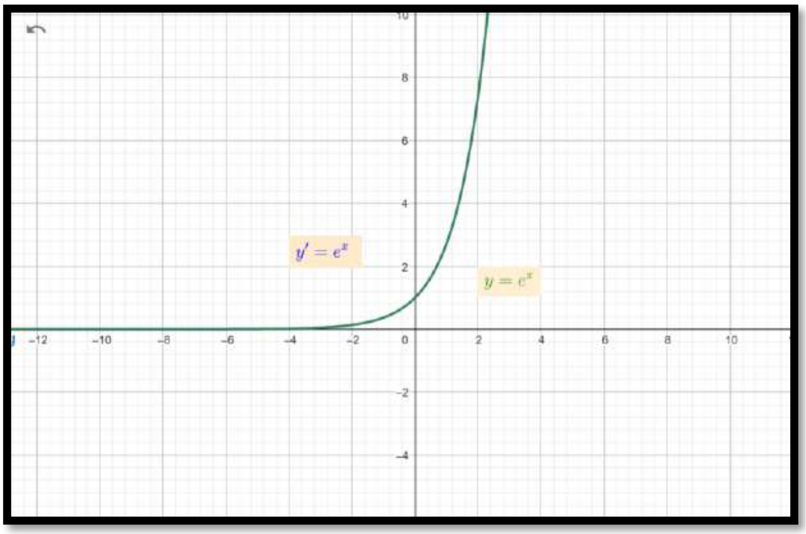


Figura. 3.21 Grafica de una función y su derivada

3.11 DERIVADA FUNCIÓN POTENCIA-EXPONENCIAL

Para la derivada de la función potencial-exponencial:

$$\boldsymbol{y = f(x)^{g(x)}}$$

Fórmula:

Corresponde aplicar la siguiente fórmula (siempre en el dominio en donde ambas funciones, la de la base y la del exponente, estén definidas y que la base no sea negativa):

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$y = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f\,'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot ln[f(x)] \cdot g\,'(x)$$

Para esta fórmula, basta con recordar la derivada de la función potencial **y la** derivada de la función exponencial**.**

Ejemplos:

Hallar la derivada de la función $y = x^{4x}$

Procedimiento	Explicación
$y = x^{4x}$	Tenemos la función
$y\,' = 4x \cdot x^{4x-1} \cdot 1 + x^{4x} \cdot ln\,[x] \cdot 4$	Se deriva la función mediante el método.
$y\,' = 4x^{4x} + 4x^{4x}\,ln\,[x]$	Finalmente, teniendo resultado al resolver las funciones

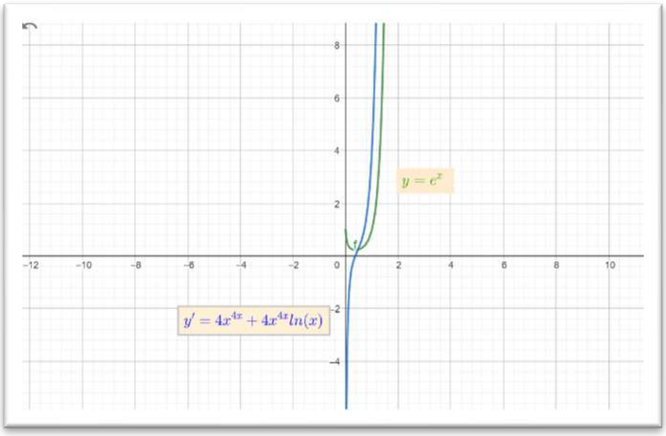


Figura. 3.22 Grafica de una función y su derivada

Derivar $y = x^{7x+8}$

Aplicamos la fórmula de una función elevada a otra función:

$$y = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f\,'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot ln[f(x)] \cdot g\,'(x)$$

Donde:

f(x)=x

g(x)=7x+8

Entonces obtenemos:

$$y' = (7x + 8)x^{7x+8-1}(1) + x^{7x+8} ln\,x\,(7)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$y' = (7x + 8)x^{7x+7} + 7x^{7x+8} ln\ x$$

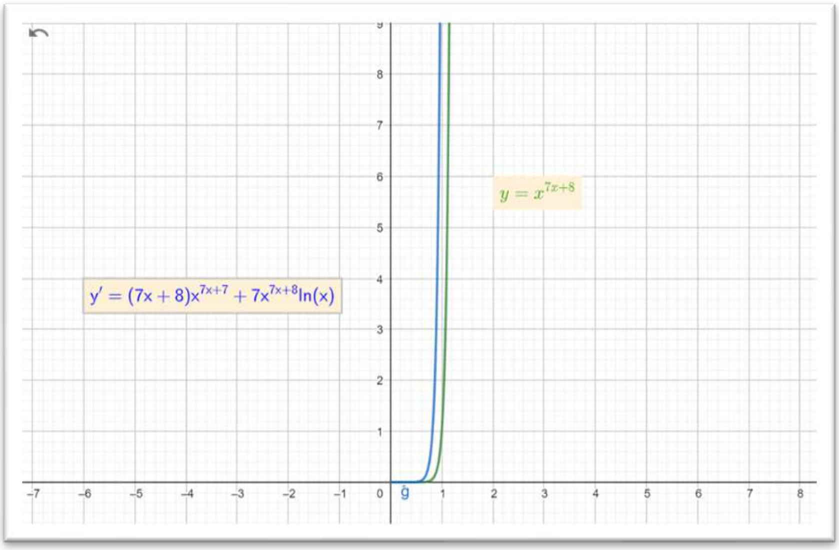


Figura. 3.23 Grafica de una función y su derivada

3.11.1 EJERCICIOS RESUELTOS

a) $\boldsymbol{y = x^x}$

Procedimiento	**Explicación**
$y = x^x$	Tenemos la función.
$ln\ y = ln\ x^x$	Tomamos el logaritmo natural de ambos lados.
$ln\ y = x\ ln\ x$	Simplificamos el exponente.
$Dx(ln\ y) = Dx(\ x\ ln\ x)$	Derivamos ambos lados con respecto a (x).
$\frac{1}{y}y' = x\ Dx(\ ln\ x + \ln x\ \mathrm{Dx}\ \mathrm{X})$	Aplicamos la regla de la cadena.
$\frac{y'}{y} = x \cdot \frac{1}{x} + ln(x)(1)$	
$\frac{y'}{y} = 1 + ln\ x$	Resolvemos para en función a y'.
$y' = y(1 + ln\ x)$	
$y' = x^x(1 + ln\ x)$	Sustituimos $y = x^x$ y obtenemos su derivada

ISBN: 978-631-6557-36-0

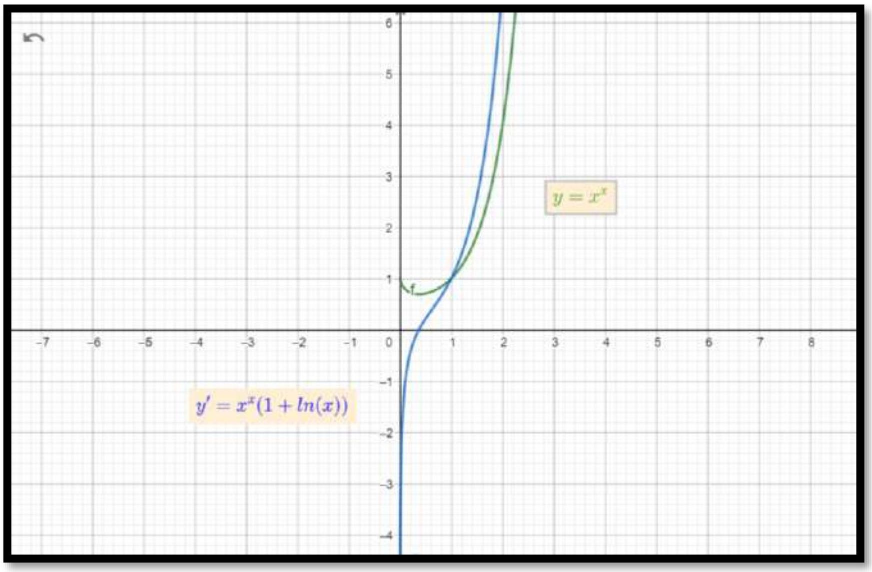


Figura. 3.24 Grafica de la función y la derivada del ejercicio 1

b) $\boldsymbol{y = e^{2x}}$

Procedimiento	Explicación
$y = e^{2x}$	Tenemos la función.
$y' = e^{2x}(2x)'$	Derivamos (e^{2x}) con respecto a (x).
$y' = e^{2x}(2)$	La derivada de (2x) es simplemente 2.
$y' = 2e^{2x}$	Simplificamos el resultado.

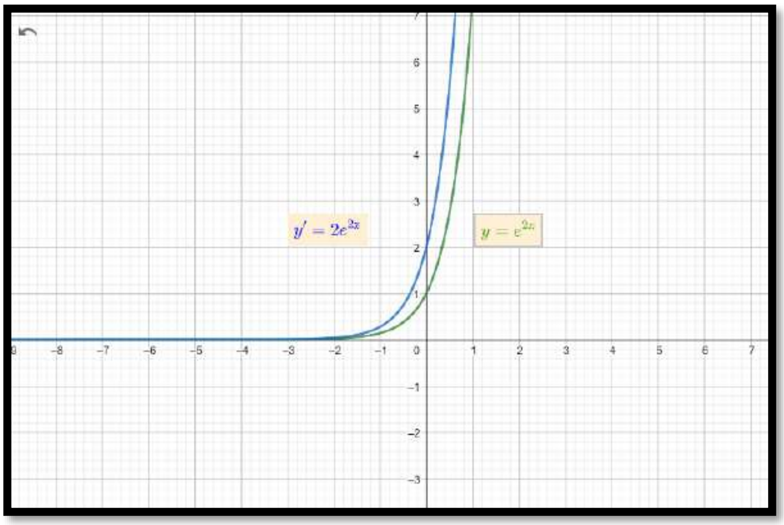


Figura. 3.25 Grafica de la función y la derivada del ejercicio 2

ISBN: 978-631-6557-36-0

c) $\mathbf{f(x) = 2^{x^2-1}}$

Procedimiento	Explicación
$f(x) = 2^{x^2-1}$	Tenemos la función.
$f\,'(x) = 2^{x^2-1}\dfrac{d}{dx}(x^2-1)ln2$	Derivamos con respecto a (x) utilizando la formula.
$f\,'(x) = 2^{x^2-1}(2x)ln2$	
$f\,'(x) = 2x \cdot 2^{x^2-1}ln2$	Simplificamos el resultado.

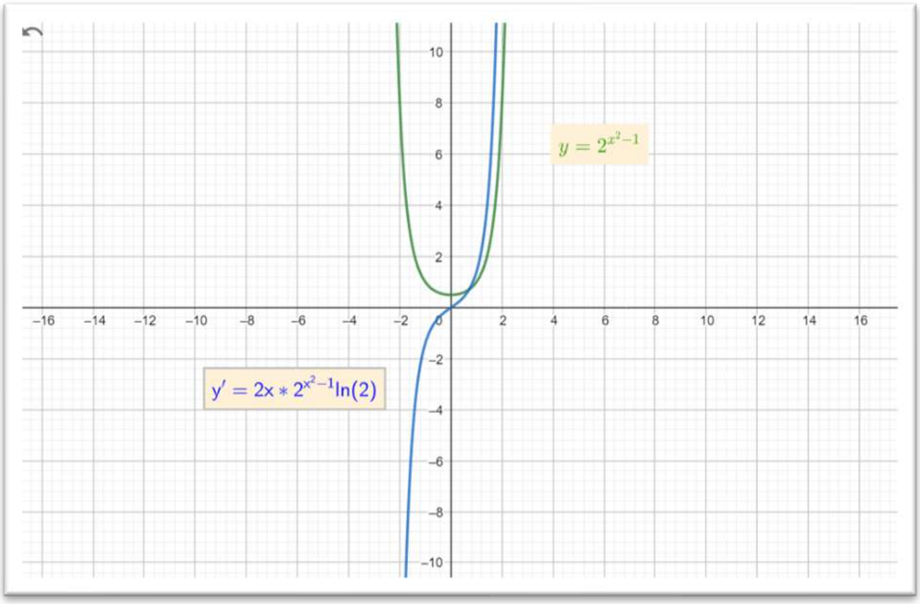


Figura. 3.26 Grafica de la función y la derivada del ejercicio 3

d) $\boldsymbol{y = 3^{\sqrt{x^2-1}}}$

Procedimiento	Explicación
$y = 3^{\sqrt{x^2-1}}$	Tenemos la función.
$y\,' = 3^{\sqrt{x^2-1}}\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2-1}\;ln\,3$	Utilizamos la fórmula
$y\,' = 3^{\sqrt{x^2-1}}\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(x^2-1)'\;ln\,3$	Resolvemos la derivada interna:

$$y\,' = 3^{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x)\ ln\ 3$$ Simplificamos el resultado.

$$y\,' = 3^{\sqrt{x^2-1}}\frac{x\ ln\ 3}{2\sqrt{x^2-1}}$$ Expresamos el resultado final.

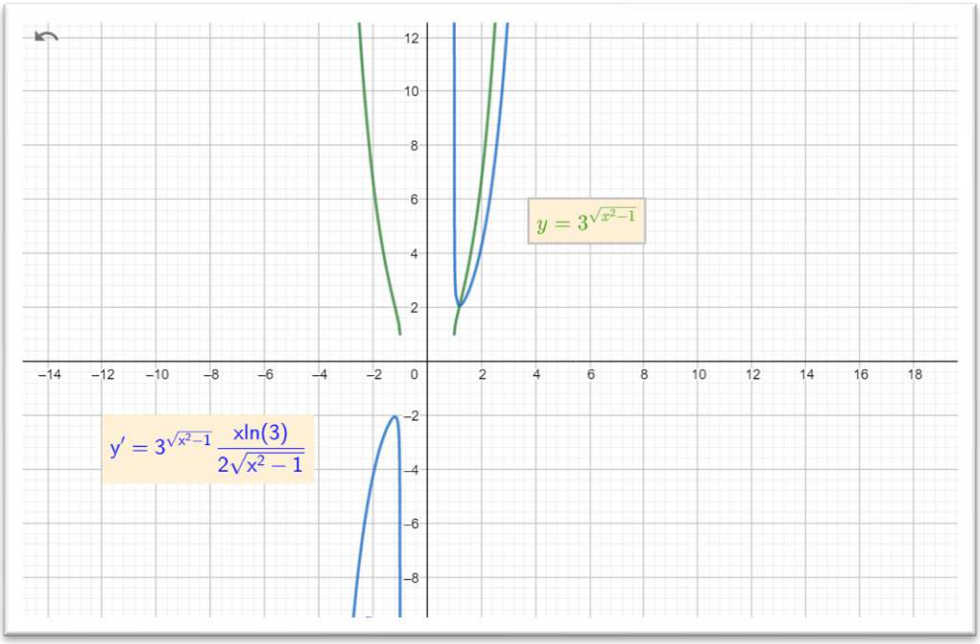


Figura. 3.27 Grafica de la función y la derivada del ejercicio 4

e) $\boldsymbol{f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{x}}}$

Aplicamos la fórmula de las fracciones compuestas; $y = \frac{f(x)}{g(x)}; y' = \frac{[f(x)]\prime g(x) - f(x)[g(x)]\prime}{g(x)^2}$

$$f\,'(x) = \frac{\sqrt{x}[e^{2x}]' - e^{2x}[\sqrt{x}]'}{(\sqrt{x})^2}$$

$$f\,'(x) = \frac{\sqrt{x}e^{2x}(2) - e^{2x}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$f\,'(x) = \frac{1}{x}(\frac{4e^{2x}x - e^{2x}}{2\sqrt{x}})$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$f'(x) = \frac{4xe^{2x} - e^{2x}}{2x\sqrt{x}}$$

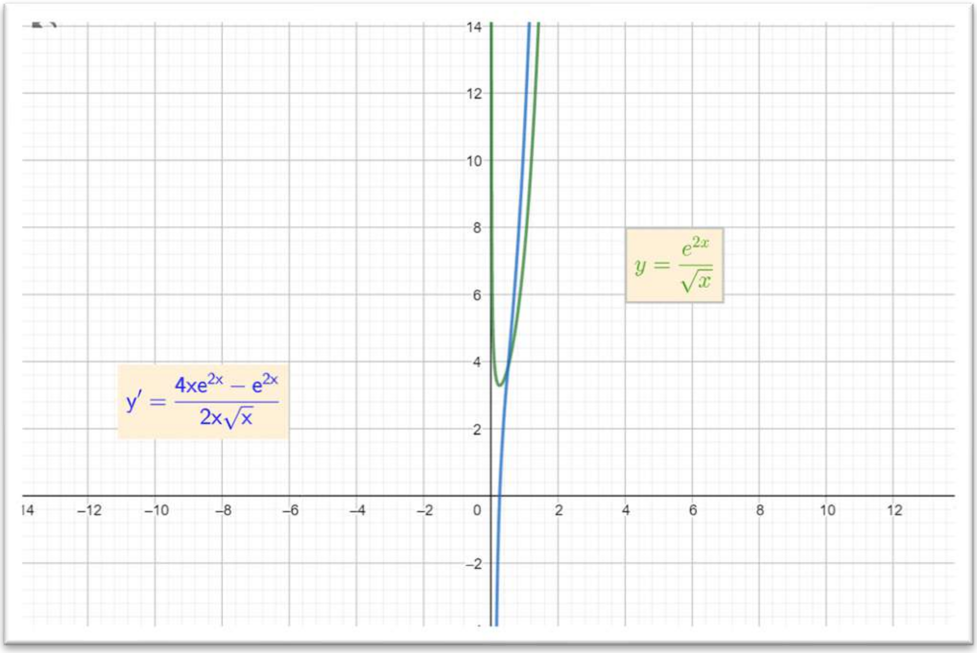


Figura. 3.28 Grafica de la función y la derivada del ejercicio 5

3.12 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

La derivación logarítmica es una técnica que permite simplificar y evaluar algunas derivadas cambiando a una escala logarítmica, se basa en las propiedades de los logaritmos, como la capacidad de transformar productos en sumas y cocientes en restas.

La idea clave es tomar logaritmos naturales (ln) de toda la expresión a derivar antes de aplicar las reglas de derivación usuales, al aplicar ln, los productos se convierten en sumas, lo que permite derivarlos fácilmente término a término.

Luego, la regla de la cadena permite derivar la expresión logarítmica y finalmente se aplica la exponencial $(e\wedge x)$ para deshacer la transformación, es particularmente útil para derivar funciones que son productos de varios factores y para simplificar exponenciales complicadas (Bronceado, 2002).

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.12.1 DERIVADA DE LA FUNCIÓN y=f(x)=ln x

Demostración:

Aplicando la definición de la derivada se tiene que:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{ln(x+\Delta x)-ln(x)}{\Delta x}$$

Como la diferencia de logaritmos es el logaritmo del cociente, se obtiene:

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{[\frac{x+\Delta x}{x}]}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{[1+\frac{\Delta x}{x}]}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot ln(1+\frac{\Delta x}{x})$$

Expresando:

$$\frac{1}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot ln(1+\frac{\Delta x}{x})$$

Como el logaritmo de una potencia es el producto del exponente por la base:

$$y' = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot ln(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$$

Donde este último limite es de la forma:

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$$

$$y' = \frac{1}{x} \cdot lne$$

Y como ln e= 1, entonces:

$$y' = \frac{1}{x}$$

Formulas:

Cuando tenemos una función logarítmica:

$$f(x) = ln\, u$$

la derivada es:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$f\,'(x) = \frac{u'}{u}$$

Ejemplo:

$y = ln\,(\frac{1-x}{1+x})$

Aplicando la propiedad de los logaritmos, tenemos:

$$y = ln\,(1-x) - ln(1+x)$$

Derivamos y desarrollamos:

$$y' = \frac{(1-x)'}{1-x} - \frac{(1+x)'}{1+x}$$

$$y' = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x}$$

$$y' = \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)}$$

$$y' = \frac{-2}{(1-x)^2}$$

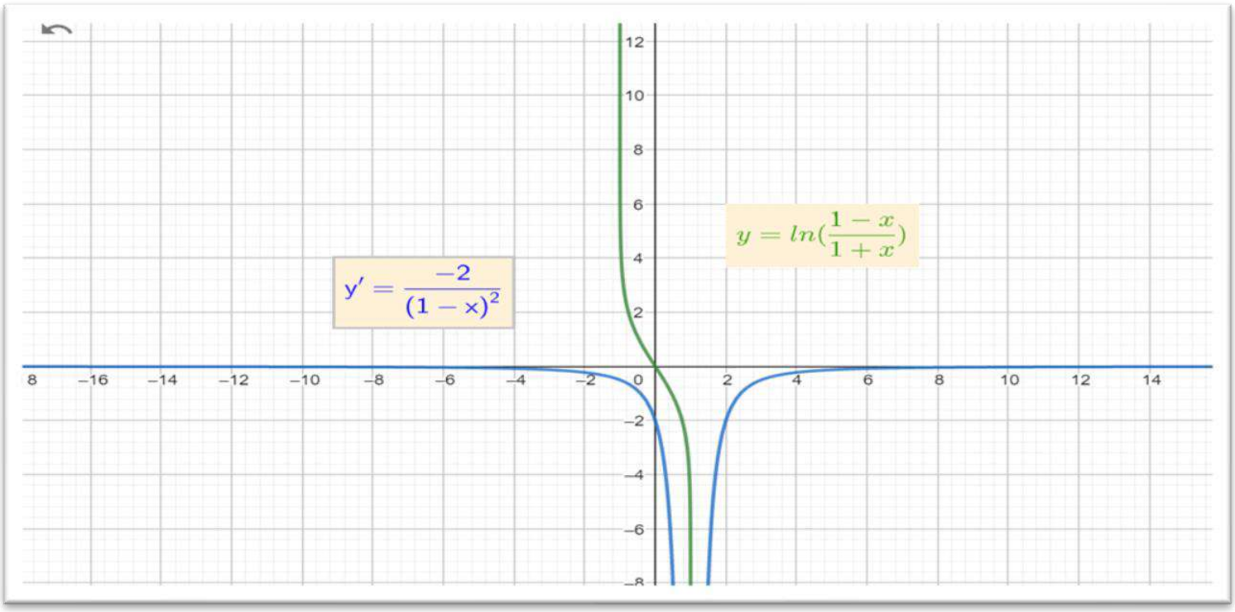


Figura. 3.29 Grafica de la función logarítmica y su derivada

3.12.2 DERIVADA DE LA FUNCIÓN y=$\log_a x$

Demostración:

ISBN: 978-631-6557-36-0

Si $\boldsymbol{a}$ es cualquier número positivo, diferente de 1, la función logaritmo de base a es la inversa de la función exponencial en base a, por lo que:

$$y = \log_a x \;\; si \; y \; solo \; si \; a^y = x$$

La relación entre los logaritmos de base a y los logaritmos naturales es la siguiente:

Si:

$$y=\log_a x$$

Entonces:

$$a^y = x$$

Tomando logaritmos naturales en los dos miembros de la igualdad se obtiene:

$$ln\, a^y = ln\, x$$

Es decir:

$$y\, ln\, a = ln\, x$$

O bien:

$$y = \frac{ln\, x}{ln\, a}$$

Sustituyendo y por $\log_a x$ se obtiene:

$$\log_a x = \frac{ln\, x}{ln\, a}$$

La derivada de cada miembro es:

$$Dx \log_a x = \frac{1}{ln\, a} Dx(lnx)$$

$$=\frac{1}{ln\, a} \cdot \frac{1}{x}$$

Como:

$$\log_a e = \frac{1}{ln\, a}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$Dx(\log_a x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

$$Dx(\log_a x) = \frac{\log_a e}{x}$$

Formulas:

Si u es una función de x y su derivada existe, entonces:

$$Dx(\log_a x) = (\frac{\log_a e}{x})Dxu$$

Si además se toma a = e se obtiene:

$$Dx(\ln u) = \frac{1}{u}Dxu$$

Que es la fórmula obtenida para la derivada de la función logaritmo natural.

Cuando tenemos una función logarítmica.

$$f(x) = \log_a u$$

Usaremos la siguiente fórmula para derivarla:

$$f'(x) = \frac{u'}{u}\log_a e$$

O visto de otra forma, como:

$$\log_a e = \frac{ln\ e}{ln\ a} = \frac{1}{ln\ a}$$

Entonces, la formula descrita arriba, es equivalente a:

$$f'(x) = \frac{u'}{u}\frac{1}{ln\ a}$$

Ejemplo:

Hallar la derivada de $y = \log_2(x^4 - 3x)$

$$y = \log_2(x^4 - 3x)$$

Identificamos u y lo derivamos:

$$u = (x^4 - 3x)$$

$$d\,u = 4x^3 - 3$$

Usamos la fórmula de la derivada de funciones logarítmicas:

$$y' = \frac{4x^3 - 3}{x^4 - 3x}\log_2 e$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

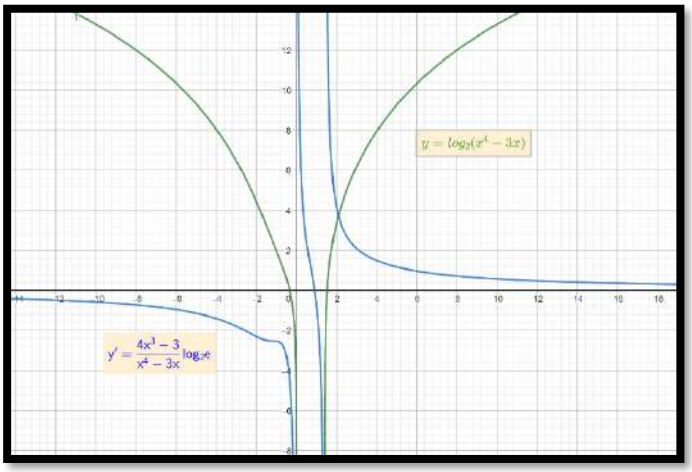


Figura. 3.30 Grafica de la función logarítmica y su derivada

3.12.3 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADAS CON LOGARITMOS

a) Derivar y=ln(1-3x)

$$y' = \frac{1}{1-3x}(1-3x)'$$

$$y' = \frac{1}{1-3x}(-3)$$

$$y' = \frac{-3}{1-3x}$$

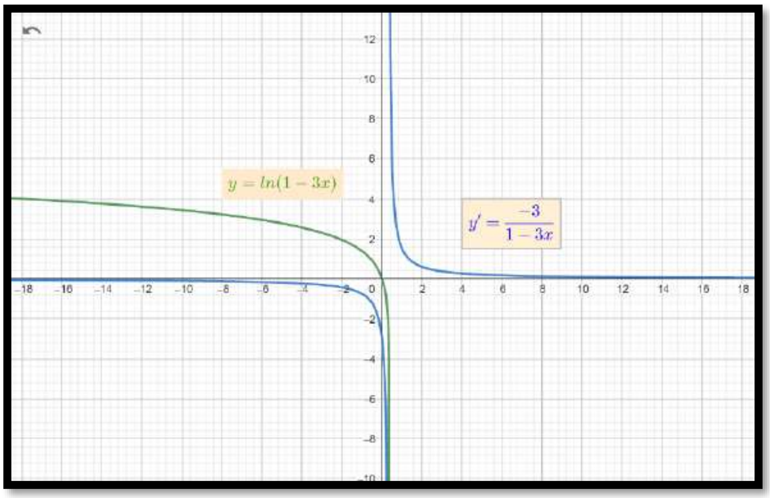


Figura. 3.31 Grafica de la función logarítmica y su derivada del ejercicio 1

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Derivar $\mathbf{y = \log_3(3x^2 - 1)}$

$$y' = \frac{1}{(3x^2-1)ln\,3}Dx(3x^2-1)$$

$$y' = \frac{1}{(3x^2-1)ln\,3}(6x)$$

$$y' = \frac{6x}{(3x^2-1)ln\,3}$$

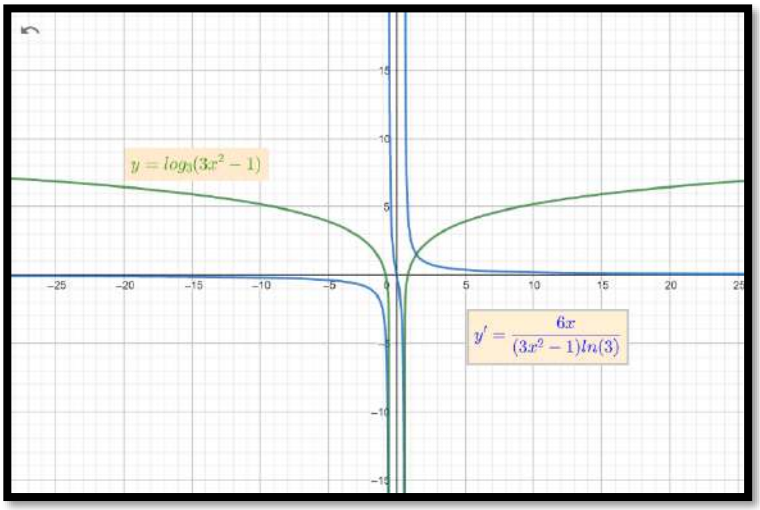


Figura. 3.32 Grafica de la función logarítmica y su derivada del ejercicio 2

3.12.4 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DERIVADAS CON LOGARITMOS

a) Resuelva la siguiente derivada:

$f(x) = \ln\left(\sqrt{((x^5 - x^3 + 3))}\right)$

b) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

c) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \log_3(x + 2)$.

d) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \log(x - 3)^2$

e) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln(x - 1) + e^{x+1}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

f) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln\,(sen(x))$

g) Resuelva la siguiente derivada:
$f(x) = \ln(\ln(x)) + arctg(x^3 - 1))$

3.13 DERIVADA IMPLÍCITA

Las derivadas implícitas se utilizan cuando una función no está expresada explícitamente como $y = f(x)$, sino implícitamente mediante una ecuación que relaciona $ax\, y$, por ejemplo, la circunferencia $x2 + y2 = 25$ está definida implícitamente en términos de $xe\, y$, no se puede despejar $y = f(x)$ directamente.

El objetivo de las derivadas implícitas es encontrar dy/dx para la función implícita, esto permite determinar pendientes de tangentes a la curva en diferentes puntos ya que calculan derivando la ecuación implícita respecto ax, considerando tanto x como y funciones del tiempo t, se aplica la regla de la cadena, derivando dentro hacia fuera en la ecuación original y luego se resuelve la ecuación resultante para dy/dx.

Este proceso es indispensable cuando no es viable o conveniente despejar y, como en ecuaciones algebraicas complejas, esto nos permite hallar valores de elasticidad, tangentes a curvas paramétricas, problemas de optimización con restricciones implícitas, análisis de circuitos, trayectorias de proyectiles, entre muchos otros (Bronceado, 2002).

3.13.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE DERIVADA IMPLÍCITA

a) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{a}$

$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} . y' = 0$

$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} y' = \frac{-1}{3\sqrt[3]{y^2}}$

$y' = \frac{-\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{x^2}} = -3\sqrt{\frac{y^2}{x^2}}$

b) $x^3 + ax^2bxy^2 + y^3 = 0$

X=3x^2+2axy+by^2

Y= a$x^2 + 2bxy + 3y^2 = 0$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$-\frac{E_x}{E_y} = -\frac{3x^2 + 2axy + by^2}{ax^2 + 2bxy + 3y^2}$$

c) $x^4 + y^4 = x^2y^2$
X=$4x^3 + 2xy^2$
Y=$4y^3 - 2x^2y$
$$-\frac{E_x}{E_y} = \frac{4x^3 + 2xy^2}{4y^3 - 2x^2y}$$

d) $2x^4y^2 - 4x^2y^4 + x^2y^2 = 6$
X=$8x^3y^2 - 8xy^2 + 2xy^4 + 2xy^2$
Y=$4x^4y - 16x^2y^3 + 2x^2y$
$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{8x^3y^2 - 8xy^2 + 2xy^4 + 2xy^2}{4x^4y - 16x^2y^3 + 2x^2y} = \frac{y(4y^2 - 1 - 4x^2)}{x(2x^2 - 8y^2 + 1)}$$

e) $2\text{y} \ln y = xy$

$$y\left(y' \ln y + 1\left(\tfrac{1}{y}y'\right)\right) = y + xy'$$

$$2y' \ln y + 2y' - xy' = y$$

$$y'(2\ln y - 2 - x) = y$$

$$y' = \frac{y}{(2\ln y + 2 - x)}$$

f) $y^2 - 2x^2y^3 + 3x^4y - x^5 = 5$
X=$-4xy^3 - 12x^3y - 5x^4$
Y=$5y^4 - 6x^2y^2 + 3x^4$
$$\frac{E_x}{E_y} = \frac{-4xy^3 - 12x^3y - 5x^4}{5y^4 - 6x^2y^2 + 3x^4} = \frac{4xy^3 + 12x^3y + 5x^4}{5y^4 - 6x^2y^2 + 3x^4}$$

g) Y=$\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^3}$=x
Y=$\sqrt{y} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{y^3}$-x
$$\frac{y'}{2\sqrt{y}} + \frac{y'}{3\sqrt[3]{y^2}} + \frac{3y'}{4\sqrt[4]{y}} = 1$$
$$y'\left(\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{y}}\right) = 1$$
$$\text{y}' = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{y}}}$$

h) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\left((x^2+y^2)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{x-y}{x^2}=\frac{1}{2}(\ln(x^2+y^2))$$

$$\frac{x-y}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}(\ln tg^{-1})(x^2+y^2)$$

$$\frac{x-y*1}{x^2+y^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x.x+2y)$$

$$\frac{x-y.\frac{dx}{dy}}{x^2+y^2}=\frac{x.\frac{d}{dx}x.\frac{dx}{dy}+y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{x-y}{y+x}$$

i) $x^y=y^x$

$$y(x)^{y-1}+x^y\ln x(y')=y'(x(y)^{x-1})+y^x\ln y$$

$$\frac{yn^y}{x}+y'x^y\ln x=y'\frac{xy}{y}+y^x\ln y$$

$$y'x^y\ln x-y'\frac{xy'}{y}=\frac{yx^y}{x}+y^x\ln y$$

$$y'(x^y\ln x-xy')=-yx^y+y^{x\ln y}$$

$$y'=\frac{-y\frac{xy}{x}+y^x\ln y}{x'\ln x-\frac{xy^x}{y'}}$$

j) $2^y+2^x=2^{x+y}$

$$2^x\ln 2\ +2^y\ln 2\ y'=2^{x+y}\ln 2(1+y')$$

$$2^y\ln 2\ y'-2^{x+y}\ln 2\ y'=-2^x\ln 2\ +2^{x+y}\ln 2$$

$$y'=(2^y\ln 2\ -2^{x+y}\ln 2\ )=-2^x\ln 2\ +2^{x+y}\ln 2$$

$$y'=\frac{2^x(2^y\ln 2\ -\ln 2\ )}{2^y(\ln 2\ -2^x\ln 2\ )}$$

3.13.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DERIVADA IMPLÍCITA

a) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b) $e^x sen\, y-e^y cosx=0$

c) $sen(xy)+cos(xy)=0$

ISBN: 978-631-6557-36-0

d) $xy = arc\ tg\frac{x}{y}$

e) $2^{\frac{x}{y}} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$

f) $\ln\frac{x}{y} = e^{xy}$

g) $\mathrm{x} - \mathrm{y} = arc\ sen\ x - arc\ sen\ y$

h) $\sqrt{xy} + 2x = \sqrt{x}$

i) $y = x + arctgy$

j) $x^3 + 2x^2y - xy^2 + 2y^3 = 2$

3.14 DERIVACIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Las funciones trigonométricas como seno, coseno y tangente tienen funciones inversas asociadas, estas funciones inversas se conocen como; arcsen, arccos y arctan.

La función arcsen es la inversa de la función seno, toma como entrada el valor de seno(x) y devuelve el ángulo x que genera ese seno, similarmente, arccos es la inversa de coseno, y arctan la inversa de tangente es importante recalcar que gráficamente, estas funciones reflexionan o invierten las ondas seno, coseno y tangente respecto a la línea identidad:

$$y = x.$$

El rango de valores de las funciones inversas está restringido para que sean biyectivas y tengan inversa (Másancho, 2003).

Las principales propiedades son:

$$sen^{-1}(sen(x)) = x$$

$$\cos^{-1}(cos(x)) = x$$

$$\tan^{-1}(tan(x)) = x$$

Estas funciones inversas trigonométricas son muy útiles para resolver ecuaciones con seno, coseno o tangente despejando el ángulo x, y tienen aplicaciones en muchas áreas como ingeniería, física, navegación, geometría y otras.

3.14.1 FUNCIÓN INVERSA DEL SENO: ARCO SENO

La función seno: $y = f(x) = sen\ x$, no es inyectiva, es decir, no tiene inversa.

ISBN: 978-631-6557-36-0

Se debe definir una restricción en el caso de seno será $f(x) = sen\,x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ si tiene inversa que adquiere el nombre de arcoseno de x siendo:

$$y = g(x) = arc.sen\,x$$

Está definida por $y = g(x) = arc.sen\,x \Rightarrow x = sen\,y$ donde $D_g = [-1,1]$ y $R_g = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. La gráfica es:

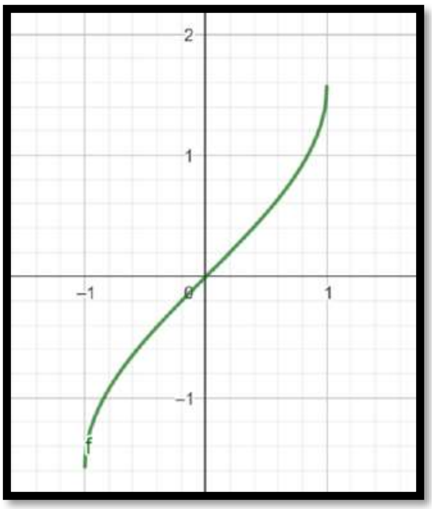


Figura. 3.33 Grafica de la función $arcsen(x)$

3.14.2 LA FUNCIÓN INVERSA DEL COSENO: ARCO COSENO

La función coseno $y = cos\,x$, no es inyectiva por ello se debe realizar una restricción.
La restricción sería: $f(x) = cos, x\epsilon[0, \pi]$
y la inversa de la función coseno se denomina arcoseno y se denota por:

$$y = g(x) = arc.cos\,x$$

además, se define como $y = g(x) = arc.cos\,x \Rightarrow x = cos\,y$ donde $D_f = [-1,1]$ y $R_f = [0, \pi]$. La gráfica es:

ISBN: 978-631-6557-36-0

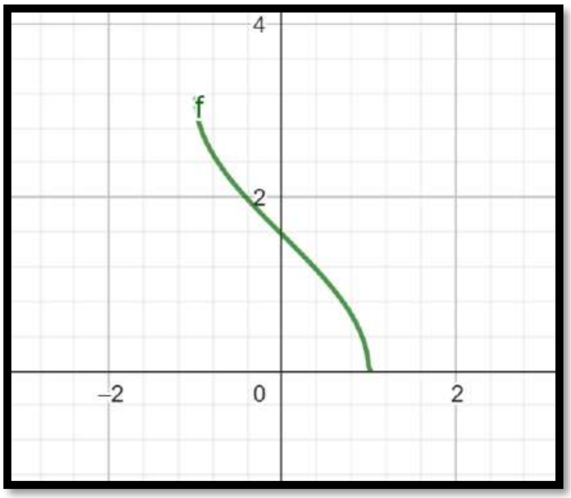


Figura. 3.34 Grafica de la función $arccos(x)$

3.14.3 FUNCIÓN INVERSA DE LA TANGENTE: ARCO TANGENTE

La función $y = tg\ x$ no es inyectiva, por eso haremos una restricción.
Entonces la función tangente sería

$f(x) = tg\ x, x\ \epsilon\ < -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$ la inversa de la tangente se denomina arcotangente y se escribirá:

$$y = g(x) = arc.tg\ x$$

definido por: $y = g(x) = arc.tg\ x \Rightarrow x = tg\ y$ donde $D_g = R\ y\ R_g =< -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} >$. La gráfica es:

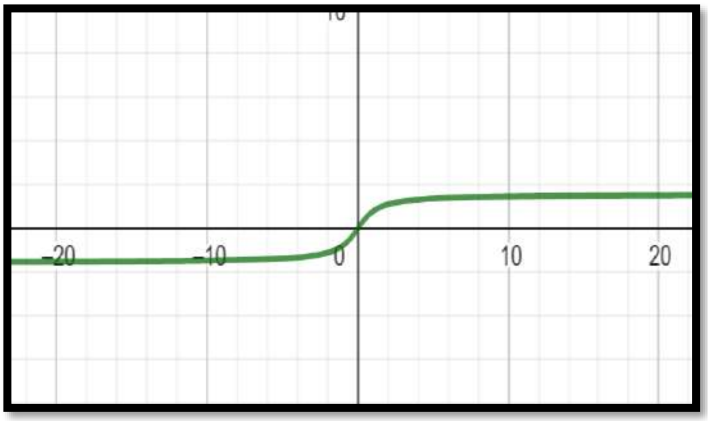


Figura. 3.35 Grafica de la función $arctan(x)$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.14.4 FUNCIÓN INVERSA DE LA COTANGENTE: ARCO COTANGENTE

Al igual que las demás no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa y se debe realizar una restricción:

$F(x) = ctgx, x \epsilon < 0 , \pi >$ y a la inversa de esta función la denominaremos arco tangente y se escribirá: $y = g(x) = arc.ctg\ x \Rightarrow x = ctg\ y$ donde $D_g = R$ y $R_g =< 0, \pi >$.

La gráfica es:

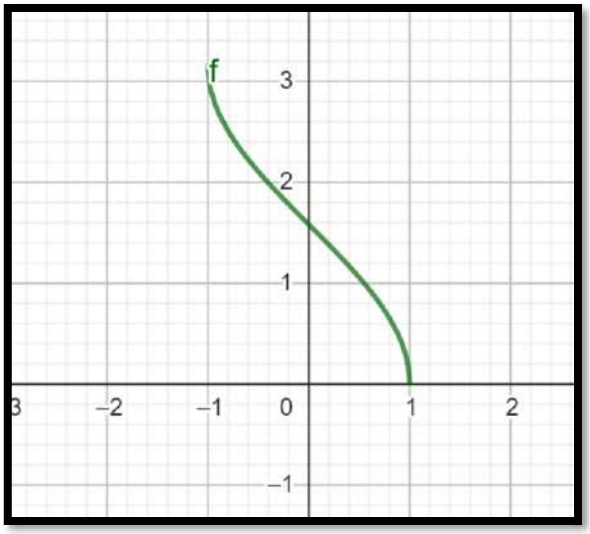


Figura. 3.36 Grafica de la función $arcctg(x)$

3.14.5 FUNCIÓN INVERSA DE LA SECANTE: ARCO SECANTE

La función secante $y = sec\ x$ no es inyectiva, por tanto, no tiene inversa y se debe realizar una restricción:

$F(x) = sec\ x, x \epsilon [0 , \frac{\pi}{2} > \cup < \frac{\pi}{2} , \pi]$ y a la inversa de esta función la denominaremos arco secante y se escribirá: $y = g(x) = arc.sec\ x \Rightarrow x = sec\ y$ donde $D_g =< -\infty, -1] \cup [1, +\infty >$ $R_g = [0 , \frac{\pi}{2} > \cup < \frac{\pi}{2} , \pi]$.

La gráfica es:

ISBN: 978-631-6557-36-0

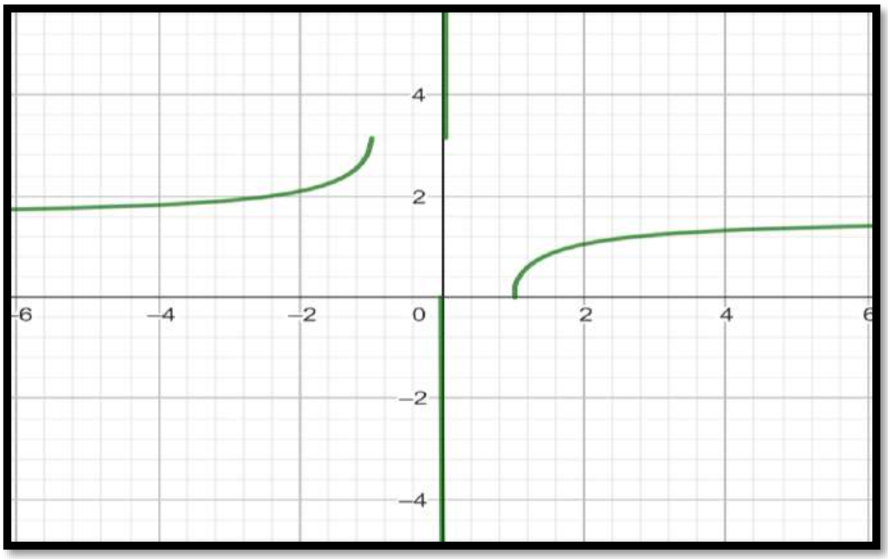


Figura. 3.37 Grafica de la función $arcsec(x)$

3.14.6 FUNCIÓN INVERSA DE LA COSECANTE: ARCO COSECANTE

La función cosecante al igual que las otras funciones trigonométricas no son inyectivas, es por ello, que no tiene inversa. Para ello se debe restringir: $f(x) = cosec\, x$, $x \epsilon\ [-\frac{\pi}{2}, 0 > \cup\ < 0, \frac{\pi}{2}]$ a la inversa la llamaremos arco cosecante y se escribirá por $y\ = g(x) = arc.cosec\, x$ definida de la siguiente manera:

$$y = g(x) = arc.cosec\ x\ \Rightarrow\ x\ =\ cosec\ y$$

Donde $D_g =< \ -\infty, -1] \cup [1, \infty >$ $R_g = [-\frac{\pi}{2}, 0\ >\ \cup\ < 0, \frac{\pi}{2}]$.

La gráfica es:

ISBN: 978-631-6557-36-0

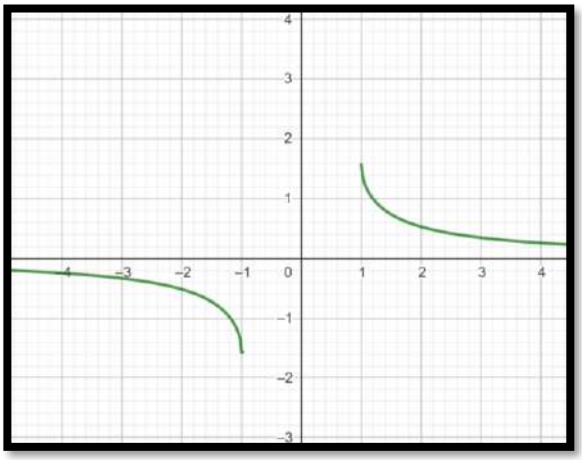


Figura. 3.38 Grafica de la función $arccsc(x)$

3.14.7 REGLAS DE DERIVACIÓN PARA FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Si $y = F(x) = arc.sen\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

Si $y = F(x) = arc.cos\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{D_x u(x)}{\sqrt{1-u^2(x)}}$

Si $y = F(x) = arc.tg\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{1+u^2(x)}$

Si $y = F(x) = arc.ctg\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{1+u^2(x)}$

Si $y = F(x) = arc.sec\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{D_x u(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)-1}}$

Si $y = F(x) = arc.cosec\ x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-D_x u(x)}{|u(x)|\sqrt{u^2(x)-1}}$

3.14.8 EJERCICOS RESUELTOS DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

- y= $Arctag\,\frac{e^x-e^{-x}}{e^x-e^{-x}} - Arcg\ \frac{cosx+2senx}{senx-2cosx}$

$$y' = \frac{\frac{e^x - e^{-x} -}{e^x - e^{-x}}}{1 + \frac{(e^x + e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2}} - \frac{\frac{cosx + 2senx}{senx - 2cosx}}{1 + (\frac{(cosx + 2senx)}{senx - 2cosx})^2}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$y' = \frac{\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{\,-x})^2}}{\frac{(e^x+e^{-x})^2+(e^x+e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}} - \frac{\frac{cosx2senx}{senx-2cosx}}{\frac{(senx-2senx)^2+(cosx+senx)^2}{(senx-2cosx)^2}}$$

$$y' = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}{(e^x+e^{\,-x})^2} - \frac{\frac{senx-2cosxcosx+2sen^2x-senx-2cosx^2cosx+2senx}{(senx-2cosx)^2}}{\frac{(senx-2senx)^2+(cosx+senx)^2}{(senx-2cosx)^2}}$$

$$y' = \frac{e^{2x}+2e^xe^{-x}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^{-x}e^{-x}-e^{-2x})}{2e^{2x}+2e^{\,-2x}} - \frac{(senx-2cosx)(2cosx-senx)-(cosx-2senx)(2senx+cosx)}{senx-4senxcosx+4cos^2x+cos^2x+4senxcosx+4sen^2x}$$

$$y' = \frac{4}{2e^{2x}+2e^{\,-2x}} - \frac{4senxcosx-4cos^2x-sen^2x-4sen^2x-cos^2x-4senxcosx)}{1+4}$$

$$y' = \frac{2}{2e^{2x}+2e^{\,-2x}} - \frac{-4-1}{5}$$

$$y' = cosh2x = \frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$$

$$y' = \frac{1}{\cosh(2x)} + 1$$

- $y = Arcos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$

$$y' = Arcos\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

$$y' = \frac{\frac{(x^{2n}+1)'(x^{2n}-1)-(x^{2n}-1)(x^{2n}-1)'}{(x^{2n}-1)^2}}{\sqrt{1-(\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1})^2}}$$

$$y' = \frac{(2nx^{2n-1})(x^{2n}-1)-(x^{2n}+1)(2nx^{2n-1})}{(x^{2n}-1)^2\sqrt{x^{4n}+2x^{2n}-x^{4n}+2n^{2x}-1}}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$y' = \frac{(2nx^{2n-1})(x^{2n}+1-x^{2n}+1)}{(x^{2n}+1)^2\sqrt{x^{4n}}}$$

$$y' = \frac{(2nx^{2n-1})(2)}{2x^n(x^{2n}+1)^1}$$

$$y' = -\frac{(2nx^{n-1})}{(x^{2n}+1)^1}$$

- $y = \frac{1}{m\sqrt{ab}}Arctg(e^m\sqrt{\frac{a}{b}})$

$$y' = \frac{1}{m\sqrt{ab}}(\frac{e^m\sqrt{\frac{a}{b}})}{1+(e^m\sqrt{\frac{a}{b}})^2}$$

$$y' = \frac{1}{m\sqrt{ab}}(\frac{me^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}})}{1+e^m\frac{a}{b}}$$

$$y' = (\frac{e^{mx}}{b(1+e^{2mx}\frac{a}{b})}$$

$$y' = (\frac{e^{mx}}{b+ae^{2mx}})$$

$$y' = \frac{1}{ae^{-mx}+be^{mx}}$$

- $y = \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1}$

$$y' = \frac{\sqrt{x}^{x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1}(x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1)-(\frac{1}{2\sqrt{x}})\,e^{x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1}}{x}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x}(2xArctg(x)+\frac{x^2}{x^2+1}-\left(\frac{1}{2x}\right)-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1}}{x}$$

$$y' = (\frac{\sqrt{x}\left(2xArctg(x)+\frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}\right)-\left(\frac{1}{2x}\right)-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^1}{x})e^{x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$y' = \left(2xArctg(x) + \frac{x\sqrt{x}}{x^2+1}\right)^1 e^{x^2Actg(x)+\frac{1}{2}Inx+1}$$

- $y = Arsen(\frac{sena\ senx}{1-cosx\ senx})$

$$y' = (\frac{(\frac{(1-cosx\ senx)(cosx)(sena)+(cosa)(sena)(senx)(cosx)}{(1-cosx\ senx)^2})}{\sqrt{(\frac{(1-cosx\ senx)^2-(sen^1a\ sen^1x)^2}{(1-cosx\ senx)^2})^1}})$$

$$y' = (sena)(cosx)\ (\frac{(\frac{(1-cosa\ senx+cosasenx)}{(1-cosx\ senx)^2})}{\sqrt{(\frac{(1-cosx\ senx)^2-(sen^2a\ sen^2x)^2}{(1-cosx\ senx)})^1}}$$

$$y' = (\frac{(sena)(cosx)}{(1-cosx\ senx)\sqrt{(1-2(cosa)(sen^2x+\cos(2a\ )sen^2x}})$$

3.14.9 EJERCICIOS PROPUESTOS DE DERIVADA DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

a) $y = arc\ sen\ (x+\sqrt{1-x^2})$

b) $y = arc\ cos\frac{b-a\ senx}{a-b\ cosx}$

c) $y = \arg cth\sqrt{2}^x$

d) $y = (cos\ x)^{arc\ cosx}$

e) $y = Arcos(\frac{b+acos\ x}{a+bcosx})$

f) $y = \frac{2}{3}\ arctagx + \frac{1}{3}arctag(\frac{x}{1-x^2})$

3.15 DERIVADA DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Surgen de considerar la trigonometría en un triángulo rectángulo sobre una geometría hiperbólica en lugar de la geometría euclidiana estándar (García, & López, 2015).

Las principales funciones hiperbólicas son:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$senh(x) = (e^x - e^-x) / 2$$
$$cosh(x) = (e^x + e^-x) / 2$$
$$tanh(x) = senh(x) / cosh(x)$$

Tienen propiedades y relaciones similares a las funciones trigonométricas circulares usuales.

Cumplen identidades como:

$$senh^2(x) - cosh^2(x) = 1$$
$$cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$$

Sus gráficas son simétricas respecto al eje y y no son periódicas, además, tienen aplicaciones en relatividad, teoría de cuerdas, geometrías no euclidianas, electromagnetismo, dinámica de fluidos, entre otros campos normalmente se relacionan con las funciones exponenciales complejas y representan soluciones de ecuaciones diferenciales hiperbólicas y poseen todas las propiedades de las funciones trigonométricas circulares: identidades, fórmulas de ángulos suma/diferencia, reducción, etc (Spiegel, 2009).

3.15.1 DERIVADA DEL SENO HIPERBÓLICO

Sea f la función real definida por $f(x) = senh\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Se sigue entonces que

$f\,'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = f(x) = senh\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = cosh\, x$

Conclusión: $f(x) = senh\, x \Rightarrow f\,'(x) = cosh\, x$

3.15.2 DERIVADA DE LA TANGENTE HIPERBÓLICA

Si $f(x) = tanh\, x = \frac{e^z - e^{-x}}{e^z - e^{-x}}$ entonces:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$f'(x) = tanhx = \frac{(e^x+e^{-z})(e^x+e^{-z}) - (e^x-e^{-z})(e^x-e^{-z})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x+e^{-z})^2 - (e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x}+e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x}-e^x-e^{-z})}{(e^z+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(2e^x)(2e^{-z})^2}{(e^z+e^{-x})^2} = (\frac{2}{e^z+e^{-z}})^2 = sech^2x$$

Lo podemos calcular de la siguiente manera:

$f(x) = tanhx = \frac{senh\, x}{cosh\, x}$ *se sigue:*

$f'(x) = tanhx = \frac{cosh\, x\, cosh\, x - senh\, x\, senh\, x}{cosh^2 x} = \frac{cosh^2 x - senh^2 x}{cosh^2 x} = \frac{1}{cosh^2 x} = sech^2 x$

Conclusión: $f(x) = tanh\, x \Rightarrow f'(x) = sech^2\, x$

3.15.3 DERIVADA DE LA SECANTE HIPERBÓLICA

Si $f(x) = sech\, x = \frac{1}{cosh\, x}$ entonces

$$f'(x) = \frac{cosh\, x\, 0 - 1\,(senh\, x)}{cosh^2 x}$$

$$= -\frac{senh\, x}{cosh\, x} x \frac{1}{cosh\, x} = -sech\, x\, tanh\, x$$

En resumen:

Tabla 5. Derivadas de funciones hiperbólicas

Función	Derivada
$senh\, x$	$cosh\, x$
$cosh\, x$	$senh\, x$
$tanh\, x$	$sech^2 x$
$coth\, x$	$-\, csch^2 x$
$sech\, x$	$-sech\, x\, tanh\, x$
$csch\, x$	$-csch\, x\, coth\, x$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Con la regla de la cadena se establece que:

Función	Derivada
$senh\ (f(x))$	$f\ '\ (x) cosh\ (f(x))$
$cosh\ (f(x))$	$f\ '\ (x)\ senh\ (f(x))$
$tanh\ (f(x))$	$f\ '\ (x)\ sech^2(f(x))$
$coth\ (f(x))$	$-\ f\ '\ (x)\ -\ csch^2(f(x))$
$sech\ (f(x))$	$-f\ '\ (x)\ sech\ (f(x))\ tanh\ (f(x))$
$csch\ (f(x))$	$-\ f\ '\ (x)\ csch\ (f(x))\ coth\ (f(x))$

3.15.4 EJERCICIOS RESUELTOS DEVIDADA DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

- $\boldsymbol{y = 2x\ sechx^3}$

$y' = 2sechx^3 + 2x(sechx^3 tanhx^3)3x^2$

$y' = 2sechx^3 - 6x^3 sechx^3 tanhx^3$

- $\boldsymbol{y = coth(3x^2) + csch(1 - x)}$

$y' = (-csch^2(3x^2)6x + (-csch(1 - x)coth(1 - x)(-1)$

$y' = -6xcsch^2(3x^2) + csch(1\text{-}x)\ coth(1\text{-}x)$

- $\boldsymbol{y = \frac{1}{4} senh(2x) - \frac{x}{2}}$

$$y' = \frac{1}{4}(cosh2x) * 2 - \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2}cosh(2x) - \frac{1}{2}$$

$$y' = \frac{1}{2}(cosh(2x) - 1)$$

$$y' = \frac{cosh(2x) - 1}{2}$$

$y' = senh^2(x)$

- $\boldsymbol{y = \frac{senhx}{3x+5}}$

$$y' = \frac{(coshx)(3x + 5) - 3(senhx)}{(3x + 5)^2}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

- $\boldsymbol{y = senh(\frac{4x^2+6x+3}{5})}$

$$y' = \left(\frac{8x+6}{5}\right) cosh(\frac{4x^2+6x+3}{5})$$

- $\boldsymbol{y = senh^5(3x^2+x+2)}$

$$y' = 5\left(senh^4(3x^2+x+2)\right)(6x+1) * cosh\ (3x^2+x+2)$$

$$y' = 5(6x+1)\ \left(senh^4(3x^2+x+2)\right) * cosh\ (3x^2+x+2)$$

3.15.5 EJERCICIOS PROPUESTO DERIVADA DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS

a) $y = ch(x^2+1)$
b) $y = \tan\mathrm{h}(x^3 - x)$
c) $y = x - ctghx - \frac{1}{3}cotgh^3x$
d) $y = x - ctghx - \frac{1}{3}cotgh^3x$
e) $y = arctg(senhx)$
f) $y = -\frac{1}{5}sech^5x + \frac{2}{3}sech^3x - sechx$
g) $y = ln(coshx) - \frac{1}{2}tanh^2x$
h) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}\cosh x + \sqrt{cosh\ 2x}\right)$
i) $y = senh(5x+8)^3$
j) $y = senh(4e^{3x} - x + 1)^4$

3.16 DERIVADAS DE LAS FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

Al igual que con las funciones trigonométricas circulares, las funciones hiperbólicas tienen también funciones inversas asociadas, estas son la $arg\ senh, arg\ cosh$ y $arg\ tanh$,las inversas de las funciones $senh(x)$, $cosh(x)$ y $tanh(x)$ respectivamente.

La función $arg\ senh(x)$ toma como entrada el valor de $senh(x)$ y devuelve el número real x que generó ese valor de senh.

Análogamente, $arg\ cosh(x)$ es la inversa de $cosh(x)$ y arg $tanh(x)$ es la inversa de $tanh(x)$.

ISBN: 978-631-6557-36-0

Cumplen las identidades:

$$senh(area\ senh(x)) = x$$
$$cosh(area\ cosh(x)) = x$$
$$tanh(area\ tanh(x)) = x$$

Sus gráficas resultan de reflexionar las curvas de $senh(x), cosh(x)$ y $tanh(x)$ respecto a la línea identidad $y = x$.

Permiten despejar la variable original en ecuaciones con funciones hiperbólicas, de la misma manera que las funciones trigonométricas inversas circulares, es importante recalcar que tienen aplicaciones similares a sus contrapartes circulares en geometría hiperbólica, relatividad, mecánica, electromagnetismo, entre otros campos (García, & López, 2015).

3.16.1 DERIVADA DEL SENO HIPERBÓLICO INVERSO

Como $y = arg\ senhx = ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), se\ sigue\ que$

$$\frac{dy}{dx} = (arg\ senh\ x)' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})}{(x+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

Conclusión: $f(x) = arg\ senh\ x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

3.16.2 DERIVADA DEL COSENO HIPERBÓLICO INVERSO

Sea *f(x)* = $arg\ coshx = ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$

$$f'(x) = (Argcosh\ x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ , x > 1.$$

Conclusión: $f(x) = argcosh\ x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1.$

3.16.3 DERIVADA DE LA TANGENTE HIPERBÓLICA INVERSA

ISBN: 978-631-6557-36-0

De $f(x) = Arg\ tanhx = \frac{1}{2} ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ se sigue que:

$$f\,'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1+x}{1-x}}\left(\frac{(1-x)(1)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{1-X}{2(1+x)}\left(\frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^2}, |x| < 1.$$

Conclusión: $f(x) \ = \ arg\ tanh\ x \ \Rightarrow \ f\,'(x) = \frac{1}{1-x^2}, |x| < 1.$

3.16.4 EJERCICIOS RESUELTOS DERIVADA DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

- $\mathbf{y = arg\ sh\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}$

$$y' = \frac{\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{\left(\sqrt{x-\sqrt{x}}\right)^2+1}}$$

$$y' = \frac{\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{1}}$$

$$y' = \frac{\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)}}{\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+1}}{1}}$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x}+1}\right)}$$

- $\mathbf{y = arg}\, \boldsymbol{ch}\, \boldsymbol{\frac{1}{x+1}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x\prime}{x+1}\right)^2-1}}[-(x+1)^{-2}]$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1-(x+1)^2}{x+1}}}.(x+1)^2$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(x+1)^2(x+1)}}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

- $\mathbf{y = arg}\, \boldsymbol{thx^x}$

$$y' = \frac{1}{1-(x^x)^2} . x^x(1 + \ln x)$$
$$y' = \frac{x^x(1+\ln x)}{1-x^{2x}}$$

- $\mathbf{y = arg\, sec}\, \boldsymbol{h\sqrt{secx}}$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{senx}\,\left(\sqrt{1-sen}\right)} . \frac{cosx}{2\sqrt{senx}}$$
$$y' = -\frac{cosx}{2senx\sqrt{1-senx}}$$

- $\mathbf{y = arg}\, \boldsymbol{csch}\left(\mathbf{ln}\,\frac{1}{x}\right)$

$$y' = \frac{-1}{\ln\frac{1}{x}\sqrt{\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2+1}} . \frac{-1}{x}$$
$$y' = \frac{-1}{-\text{lnx}\sqrt{\ln^2 x+1}} . \frac{-1}{x}$$
$$y' = \frac{-1}{\text{xlnx}\sqrt{\ln^2 x+1}}$$

3.16.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DERIVADAS DE FUNCIONES HIPERBÓLICAS INVERSAS

a) $y = 2\text{argctgh}^3(5x + e^x)^4$

b) $y = 2x + 3senx + 4cosx + 5argsenhx$

c) $y = argsenh\,^3(e^{2x} - 5x)^2$

d) $y = \text{argcosh}^4(e^{2x} + 7x)^3$

e) $y = (4x^2 + 1)argcosh(5x + 3)$

f) $y = argtgh(x^2 - 3x + 1)$

g) $y = argtgh^4(x^3 + 2x + 1)$

h) $y = argtah^3(2x - 1)$

i) $y = (5x^3 - 4x^2 + 3x - 2)argctgh(x^2 + 3e^{3x})$

j) $y = 5\, argsech\,^2(6x^2 - 5)^3$

k) $y = argcosech(x^4 - 3x^2 - 5x + 6)^3$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.17 DERIVADAS DE ÓRDENES SUPERIORES

Si f es derivable en $]a, b[$, admite la función derivada f' definida en $]a, b[$ así que:

$$f' :]a, b[\to \boldsymbol{R}$$

$$x \ \to \ f'(x)$$

Si f' es derivable en $]a, b[$ entonces su función derivada va a estar asociada en $]a, b[$, la misma que se nombra segunda derivada de f o la función derivada de orden 2 y se escribe f''.

$$f'' :]a, b[\to \boldsymbol{R}$$

$$x \ \to \ f''(x)$$

Igual si f'' admite derivada en $]a, b[$ entonces se hablará de una función derivada tercera de f o función derivada de tercer orden y será escrita por $f''' \ o \ f3$

$$f''' :]a, b[\to \boldsymbol{R}$$

$$x \ \to \ f'''(x)$$

Y así las funciones pueden derivarse de forma n-ésima denotando a la función como f^n .

Observación. – $(f')'(x) = f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$, es decir la segunda derivada es la derivada de la primera derivada, la tercera derivada es la derivada de la segunda, etc, etc.

Las notaciones son:

$$y' \ = f'(x) = D_x f(x) = \frac{dy}{dx}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.17.1 EJERCICIOS RESUELTOS DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

- $\boldsymbol{y = x^2 \mathbf{sen}\ (x)}$

$y' = 2xsen(x) + x^2\cos(x)$

$y'' = 2sen(x) + 4xcos(x) - x^2\text{sen}\ (x)$

$y''' = 2\cos(x) + 4\cos(x) - 2x(senx) - x^2\cos(x)$

- $\boldsymbol{y = e^x \cos(x)}$

$y' = e^x\cos(x) - e^x sen(x)$

$y'' = 2e^x sen(x)$

$y''' = 2e^x\cos(x) + 2e^x sen(x)$

- $\boldsymbol{y = 3x^2 + 2e^x sen(x)}$

$y' = 6x + 2e^x sen(x) + 2e^x\cos(x)$

$y'' = 6 + 4e^x\cos(x)$

- $\boldsymbol{y = e^{2x}\cos(6x)}$

$y' = e^{2x}\big(-6sen(6x)\big) + \cos(6x) * (2e^{2x})$

$y' = -6e^{2x}sen(6x) + 2e^{2x}\cos(6x)$

$y'' = -6e^{2x}(6\cos(6x)) + sen(6x)(-12e^{2x}) + 2e^{2x}\big(-6sen(6x)\big) + \cos(6x)(4e^{2x})$

$y'' = -36e^{2x}\cos(6x) - 12e^{2x}sen(6x) - 12e^{2x}sen(6x) + 4e^{2x}\cos(6x)$

$y'' = -32e^{2x}\cos(6x) - 24e^{2x}sen(6x)$

- $\boldsymbol{y = \frac{5}{x}}$

$y' = -\frac{5}{x^2}$

$y'' = \frac{10}{x^2}$

$y''' = -\frac{30}{x^4}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$y^4 = \frac{120}{x^5}$

$y^5 = -\frac{600}{x^6}$

$y^6 = \frac{3600}{x^7}$

3.17.2 EJERCICIOS PROPUESTO DERIVADA DE ORDEN SUPERIOR

a) $y = sen(2x)\ obtener\ y^5$

b) $y = 2x^3 - 4x^2 - 5x - 12\ obtener\ y'''$

c) $y = -2x^2 - 4x - 1\ obtener\ y''$

d) $y = 10x^2 - 3x + 1\ obtener\ y''$

e) $y = sen(7x)\ obtener\ y'''$

f) $y = \sqrt{1 + 2x}\ obtener\ y''$

g) $y = \ln(\cos(2x))\ obtener\ y'''$

h) $y = \frac{2x-1}{x+1}\ obtener\ y'''$

i) $y = x^6 - 4x^4 - x + 3\ obtener\ y^4$

j) $y = 32\cos(7x)\ obtener\ y'''$

3.18 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

Dentro de las muchas aplicaciones de las derivadas, podemos dividirlas entre su uso es procesos netamente matemáticos y en su uso a nivel profesional, empezaremos con los usos matemáticos:

- **Optimización:** Las derivadas permiten encontrar máximos y mínimos de funciones, importante en cálculo de varias variables, programación lineal, investigación de operaciones.
- **Geometría:** La derivada da información sobre la pendiente de una curva y permite estudiar propiedades de curvas y superficies. Útil en geometría diferencial.
- **Análisis numérico:** Los métodos numéricos como Newton-Raphson usan derivadas para aproximar raíces de ecuaciones.
- **Series de Taylor:** Las series de Taylor usan derivadas sucesivas en un punto para aproximar funciones.

ISBN: 978-631-6557-36-0

- **Ecuaciones diferenciales:** Las derivadas son fundamentales para formular y resolver ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales.
- **Probabilidad y estadística:** Derivadas intervienen en la estimación de distribuciones, máxima verosimilitud, inferencia Bayesiana.
- **Álgebra lineal:** Derivadas direccionales se usan en cálculo de valores propios, diagonalización de matrices.
- **Variable compleja:** Las derivadas complejas extienden los conceptos de análisis a las funciones de variable compleja.
- **Física y química teórica:** Derivadas modelan cambio, optimizan cantidades termodinámicas, describen movimiento, flujos.

En cuanto a sus usos en áreas netamente profesionales:

- **Economía:** Para maximizar beneficios, minimizar costos, calcular elasticidad de demanda, análisis marginal.
- **Finanzas:** Encontrar tasas de retorno óptimas de inversiones, valuar activos, modelar el precio de derivados financieros.
- **Ingeniería:** Calcular tasas de cambio en sistemas dinámicos, optimizar parámetros de diseño como resistencia, estabilidad.
- **Física y Química**: Describir cambios en movimiento, trayectoria, mezclas y reacciones químicas.
- **Medicina**: Modelar la dinámica de enfermedades, difusión de fármacos, flujos sanguíneos y de fluidos.
- **Machine Learning:** Entrenamiento de modelos como redes neuronales usando derivadas para optimizar pesos.
- **Ciencia de datos:** Derivadas para estimar máxima verosimilitud en modelos estadísticos.
- **Negocios:** Análisis de punto de equilibrio, efecto de cambios marginales, elasticidad de demanda, optimización de precios.
- **Meteorología:** Predicción del cambio en sistemas climáticos usando derivadas parciales en ecuaciones.
- **Control:** Derivadas para obtener modelos lineales de sistemas no lineales como en automóviles, drones (Fleming, & Varberg, 1992).

ISBN: 978-631-6557-36-0

3.18.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

EJERCICIO 1

Se te pide en este ejercicio que determines la velocidad de cambio del volumen respecto del tiempo en el instante t = 10 seg, o sea, el valor de la derivada $\frac{dv}{dt}$ calculada en t = 10.

La idea será entonces expresar el volumen V en función del tiempo t. Por un lado, la ley de Boyle establece que P.V = K y por otro conocemos como varía la presión con el tiempo:

P(t) = 30 + 2.t

Basta entonces que despejemos el volumen de la ley de Boyle y luego sustituyamos la presión por su expresión en t. Tendremos entonces:

$$v(t) = \frac{K}{P(t)}$$

Sustituyendo P(t) obtenemos finalmente:

$$v(t) = \frac{K}{30 + 2 * t} \qquad (1)$$

Derivemos (1) y hallemos su valor en t = 10

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2K}{(30 + 2 * t)^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dv}{dt}(10) = \frac{K}{50^2}$$

El dato de que el volumen inicial es de 60 cm3 nos permite calcular la constante K.

En efecto, para t=0 deberá ser V= 60.

Sustituyendo en (1): $60 = \frac{k}{30} \qquad \Rightarrow \qquad k = 1800$

$$\frac{dv}{dt}(10) = -\frac{3600}{2500} = -1.44 \ \frac{\text{cm3}}{seg}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

En definitiva, el gas está disminuyendo su volumen a razón de 1.44 cm3 por seg a los 10 seg. de iniciado el proceso de compresión.

Veamos otra forma de resolver el ejercicio.

Como la presión y el volumen son funciones de t la ley de Boyle establece:

$$p(t) * v(t) = k \qquad \forall t \geq 0 \qquad\qquad (1)$$

Derivando ambos miembros de la igualdad (1) obtienes:

$$\frac{d(p * v)}{dt} = \frac{dk}{dt} \qquad \forall t \geq 0$$

En el primer miembro tenemos la derivada de un producto y en el segundo de una constante, por tanto:

$$p\frac{dv}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dv}{dt} = -\frac{v}{p} * \frac{dp}{dt} \qquad\qquad (2)$$

Como nos interesa el instante t=10 debemos calcular, para sustituir en la relación (2):

$$\mathrm{V}(10), \mathrm{p}(10) \ \mathrm{y} \ \frac{dp}{dt}(10)$$

De $p = 30 + 2 * t \quad \rightarrow \begin{cases} p(10) = 50 & p(0) = 30 \\ \frac{dp}{dt}(t) = 2 & \frac{dp}{dt}(10) = 2 \end{cases}$

$$De\ BOYLE\ : \quad \begin{cases} p(10) * v(10) = k & \rightarrow \quad v(10) = \frac{k}{50} \\ p(0) * v(0) = k & \rightarrow \quad k = 30 * 60 = 1800 \end{cases}$$

Haciendo la sustitución de valores en (2) encontramos la solución que y conocíamos.

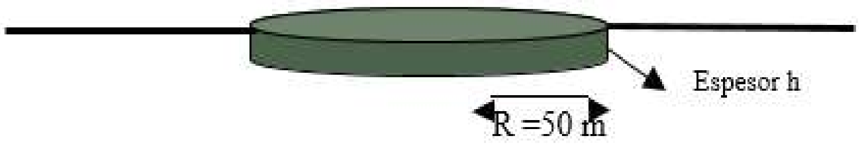
$$\frac{dv}{dt}(10) = -1.44 \ \frac{\mathrm{cm3}}{seg}$$

De esta forma se resuelve el ejercicio sin explicitar V(t).

EJERCICIO 2

Debes hallar en este ejercicio la velocidad con que aumenta el radio R a medida que la mancha se expande sobre la superficie del mar, en el instante en que R = 50m.

ISBN: 978-631-6557-36-0



Podríamos pensar en hallar la expresión R(t) para derivarla posteriormente. Sin embargo no se te indica como dato del problema la forma en que el espesor h varía con el tiempo por lo que no lograremos encontrar R(t).

Debes encarar el ejercicio partiendo de la relación entre R y h que nos proporciona el volumen de la mancha que sabemos se mantiene constante. Tendremos:

$$V = \pi . R2 . h \quad \forall t \geq 0 \qquad (1)$$

Derivemos ambos miembros de la igualdad (1) respecto de (t):

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \pi\left(2R\frac{dR}{dt} * h + R^2\frac{dh}{dt}\right) \qquad (2)$$

Como V es constante, es decir independiente de t , sabemos que: $\frac{dv}{dt} = 0$ lo que nos

permite concluir de (2) que:

$$2R\frac{dR}{dt} * h + R^2\frac{dh}{dt} = 0$$

Despejando $\frac{dR}{dt}$ *obtenemos que* $\frac{dR}{dt} = \frac{-R}{2h} * \frac{dh}{dt}$ (3)

Como tenemos el dato de que la altura de la mancha disminuye a razón de $10 \frac{cm}{hora}$

Será :

$$\frac{dh}{dt} = -10^{-2}\frac{m}{hora}$$

De la relación (1)

$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

Como V = 100 m3 , R = 50 m $\Rightarrow h = \frac{100}{\pi 50^2} = \frac{0.04}{\pi}$ m

Sustituyendo valores en la ecuación (3) se tiene finalmente:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{50\,\pi}{2(0.04)} * 10^{-2} = 6.25\,\pi\,\frac{m}{h}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

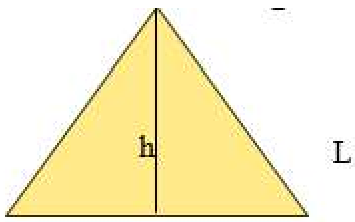
La velocidad con que aumenta el radio de la mancha cuando ese radio es de 50 m ,

resulta entonces cercana a los $20\ \frac{m}{h}$

EJERCICIO 3

Si llamamos L al lado del triángulo equilátero, siendo su altura $h\ \frac{\sqrt{3}}{2}$ L su área A será:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} L^2 \qquad\qquad \text{con } \mathrm{A} = \mathrm{A(t)} \quad \mathrm{y} \quad \mathrm{L} = \mathrm{L(t)}$$



Se te pide la rapidez de variación de la longitud de los lados por lo que debes calcular

$$\frac{dL}{dt} \quad para \;\; A \;\; = 200\ cm^2$$

Derivando respecto de t la igualdad (1) obtenemos:

$$\frac{dA}{dt} \quad = \frac{\sqrt{3}}{4} * 2\mathrm{L}\, \frac{dL}{dt} \qquad\qquad (2)$$

$Delaexpresión(2)debemosdespejar\frac{dL}{dt}ysustituir\frac{dA}{dt}yL\ por\ susv\ alores\ correspondientes$

Al instante en que $A \;\; = 200\ cm^2$

De (1) $200\ \frac{\sqrt{3}}{4}\ L^2 \quad \Longrightarrow\ L \cong 21.5\ cm$ y teniendo en cuenta que $\frac{dA}{dt} \;= -4\,\frac{cm}{min}$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dL}{dt} \;\cong\; \frac{-8}{21.5\sqrt{3}} \quad \cong\ -0.21\ \frac{cm}{min}$$

Los lados están entonces disminuyendo sus longitudes a la velocidad calculada.

EJERCICIO N º4

Como $\frac{1}{R} \;= \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \qquad \Longrightarrow \qquad R = \frac{R1*R2}{R1+R2}$ siendo R ,R1,R2 funciones de t

Derivando la última expresión respecto de t tendremos:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{dR}{dt} = \frac{(\frac{dR1}{dt} * R2 + R1 * \frac{dR2}{dt})(R1 + R2) \; - \; R1 * R2 * (\frac{dR1}{dt} + \frac{dR2}{dt})}{(R1 + R2)^2}$$

Operando y simplificando obtienes:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{R1^2 \; * \; \frac{dR2}{dt} \; + R2^2 \; * \; \frac{dR1}{dt}}{(R1 + R2)^2}$$

Siendo $\frac{dR1}{dt} = 0.01 \; \frac{\Omega}{seg} \quad y \quad \frac{dR2}{dt} = 0.02 \; \frac{\Omega}{seg} \quad , R1 = 30 \; \Omega \, , \mathrm{R2} \; = 90 \; \Omega$

Sustituyendo valores obtienes:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{900.2.10^{-2} + 8100.10^{-2}}{120^2} \; \cong \; 68.75.10^{-4} \; \frac{\Omega}{seg}$$

La resistencia equivalente R está entonces aumentando con la rapidez calculada.

3.18.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

a) Cada arista de un cubo variable está aumentando a razón de 3 pulgadas por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando el volumen del cubo cuando una arista es de 12 pulgadas de longitud?

b) Suponga que una pompa de jabón mantiene su forma esférica conforme se expande, ¿qué tan rápido aumenta el radio cuando éste es de 3 pulgadas, si se sopla aire a la burbuja a una razón de 3 pulgadas cúbicas por segundo?

c) Un aeroplano que vuela horizontalmente a una altitud de una milla pasa directamente sobre un observador. Si la velocidad constante del aeroplano es de 400 millas por hora, ¿qué tan rápido aumenta su distancia respecto del observador 45 segundos más tarde? Sugerencia: observe que en 45 segundos el aeroplano ha recorrido 5 millas.

d) Un estudiante utiliza un popote para beber de un vaso cónico de papel, cuyo eje es vertical, a razón de 3 centímetros cúbicos por segundo. Si la altura del vaso es de 10 centímetros y el diámetro de su A3 4 # 1 60 = 180 hora B, ≈ abertura es de 6 centímetros, ¿qué tan rápido está bajando el nivel del líquido cuando la profundidad del líquido es de 5 centímetros?

e) Un aeroplano que vuela hacia el oeste a 300 millas por hora pasa por arriba de la torre de control al mediodía, y un segundo aeroplano que vuela hacia el norte, a la misma altitud pero a 400 millas por hora, pasa por la torre una hora después. ¿Qué tan rápido está cambiando la distancia entre los aeroplanos a las 2:00 p.m.? Sugerencia: véase el ejemplo 3.

ISBN: 978-631-6557-36-0

f) Una mujer en un muelle jala una cuerda atada a la proa de un pequeño bote. Si las manos de la mujer están 10 pies por encima del punto en donde la cuerda está sujeta al bote,y si ella está recobrando la cuerda a razón de 2 pies por segundo, ¿qué tan rápido se aproxima el bote al muelle cuando falta por recogerse 25 pies de cuerda?

g) Una escalera de 20 pies está recargada contra un edificio. Si la parte inferior de la escalera se desliza a lo largo del pavimento alejándose directamente del edificio a una velocidad de 1 pie por segundo,¿qué tan rápido está descendiendo el extremo superior de la escalera, cuando el pie de la escalera está a 5 pies de la pared?

h) Una escalera de 20 pies está recargada contra un edificio. Si la parte inferior de la escalera se desliza a lo largo del pavimento alejándose directamente del edificio a una velocidad de 1 pie por segundo, ¿qué tan rápido está descendiendo el extremo superior de la escalera, cuando el pie de la escalera está a 5 pies de la pared?

i) Supongamos que un derrame de petróleo se está limpiando por medio de bacterias esparcidas en él, las cuales lo consumen a una razón de 4 pies cúbicos por hora. El derrame de petróleo está modelado por la forma de un cilindro muy delgado cuya altura es el grosor de la capa de petróleo. Cuando el grosor de la capa es de 0.001 pie, el cilindro tiene 500 pies de diámetro. Si la altura disminuye 0.0005 pie por hora, ¿a qué razón cambia el área de la capa?

j) De un tubo sale arena a razón de 16 pies cúbicos por segundo. Si al caer la arena se forma un montón cónico en el piso, cuya altura siempre es del diámetro de la base, ¿qué tan rápido aumenta la altura cuando el montón es de 4 pies de altura? Sugerencia: refiérase a la figura 9 y utilice el hecho de que V=13pr2h.

k) Un niño está volando una cometa. Si la cometa está a 90 pies del nivel de la mano del niño y el viento sopla en dirección horizontal a 5 pies por segundo, ¿con que rapidez el niño suelta cordel, cuando ya ha soltado 150 pies de cordel? (Suponga que el cordel permanece en línea recta desde la mano hasta la cometa, en verdad una suposición poco realista.

l) Una alberca es de 40 pies de largo, 20 pies de ancho, 8 pies de profundidad en el extremo más hondo y 3 pies en el extremo menos profundo; el fondo es rectangular (véase la figura 10). Si la alberca se llena al bombear agua a una razón de 40 pies cúbicos por minuto, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando la profundidad es de 3 pies en el extremo más hondo?

m) Una partícula P se mueve a lo largo de la gráfica de $y = \sqrt{x^2 - 4}; x >= 2$ de modo que la abscisa de P está aumentando a razón de 5 unidades por segundo. ¿Qué tan rápido está aumentando la ordenada (coordenada y) cuando x=3?

ISBN: 978-631-6557-36-0

n) Un disco metálico se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas por segundo, ¿con qué rapidez aumenta el área de una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas?

o) Dos barcos parten desde el mismo puerto en una isla,uno va en dirección norte a 24 nudos (24 millas náuticas por hora) y el otro con rumbo este a 30 nudos. El barco con dirección norte salió a las 9:00 a.m. y el otro dejó el puerto a las 11:00 A.M.¿Qué tan rápido aumenta la distancia entre ellos a las 2:00 P. M.? Sugerencia: sea t = 0 a las 11:00 A.M.

p) La luz de un faro,que se encuentra 1 kilómetro alejado de una playa recta, gira a 2 revoluciones por minuto. ¿Con qué rapidez se mueve el rayo de luz a lo largo de la playa cuando pasa por el punto que se encuentra a kilómetro del punto que está enfrente del faro?

q) Una aficionada a la aviación observa un aeroplano que vuela a una altura constante de 4000 pies hacia un punto que se encuentra directamente sobre de ella. Ella observa que cuando el ángulo de eleC 1 2 ≈ 2x2 - 4, x Ú 2, ≈ vación es radián, este aumenta a una velocidad de radián por segundo. ¿Cuál es la velocidad del aeroplano?

r) Chris, que mide 6 pies de estatura, camina alejándose de un poste de luz,de 30 pies de altura,a una velocidad de 2 pies por segundo El vértice del ángulo, u, opuesto a la base de un triángulo isósceles, con lados iguales de longitud 100 centímetros, aumenta a razón de de radián por minuto.¿Con qué rapidez aumenta el área del triángulo cuando el ángulo del vértice mide p>6 radianes?

s) Un largo paso a desnivel de una autopista pasa por encima de una vía de ferrocarril que está a 100 pies por debajo y forma un ángulo recto con él.Si un automóvil que viaja a 45 millas por hora (66 pies por segundo) está directamente por arriba de la parte delantera de un tren que va a 60 millas por hora (88 pies por segundo),¿qué tan rápido se están separando 10 segundos después?

ISBN: 978-631-6557-36-0

CAPITULO 4

4. INTEGRALES

4.1 INTRODUCCION

La integral es un concepto fundamental del cálculo que generaliza la suma de elementos infinitesimales para calcular el área bajo una curva, el volumen de un sólido, la cantidad de una magnitud física, entre muchas otras aplicaciones (Larson, & Edwards, 2010).

Existen dos tipos principales de integrales:

- **La integral definida:** $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva de $f(x)$ entre a y b. Geométricamente es el límite de una suma de áreas de rectángulos cuya altura es $f(x)$ y cuya base tiende a cero. Algebraicamente, satisface propiedades como linealidad, aditividad y relación con la derivada.

- **La integral indefinida**: $\int f(x)dx$ es una operación inversa a la derivada, que encuentra una función $F(x)$ cuya derivada es $f(x)$. Requiere métodos analíticos de integración y una constante arbitraria aparece en la solución.

Las integrales tienen aplicaciones muy amplias e importantes. Algunos usos son calcular áreas, volúmenes, longitud de arco, trabajo mecánico, masa, centroides, momento de inercia, carga eléctrica, energía, y cualquier cantidad que represente una acumulación, los métodos principales de integración incluyen sustitución, integración por partes, fracciones parciales, integración trigonométrica y otras técnicas para hallar primitivas de funciones.

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.2 INTEGRALES INDEFINIDAS

4.2.1 DEFINICION

Definimos la integral indefinida de una función $\boldsymbol{f(x)}$ como la antiderivada general de dicha función (Granville, 2003).

Utilizaremos la siguiente notación para designar la integral indefinida de $\boldsymbol{f(x)}$.

$$\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$$

De tal razón que $\int \boldsymbol{f(x)\,dx}$ representará a todas las antiderivadas de la función $\boldsymbol{f(x)}$.

Contamos con las siguientes igualdades:

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dx}}\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \boldsymbol{f(x)}$$

$\int \boldsymbol{f(x)\,dx} = \boldsymbol{F(x) + C}$, sí $\boldsymbol{F'(x) = f(x)}$

Donde C es una constante arbitraria.

Debemos comprobar que $\boldsymbol{F(x) + C}$ es la antiderivada general de la función $\boldsymbol{f(x)}$ para ello podemos seguir una serie de pasos

Primer paso.

Si $\boldsymbol{F(x) + C}$ es una antiderivada de $\boldsymbol{f(x)}$. Eso quiere decir que:

$$\boldsymbol{(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x)}$$

Segundo paso.

Teniendo en consideración que $\boldsymbol{G(x)}$ es la antiderivada de $\boldsymbol{f(x)}$, por lo que podemos decir que $\boldsymbol{G(x) = F(x) + C}$. Por consecuente se obtiene que:

$$\boldsymbol{G'(x) = f(x) = F'(x)}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Y por lo tanto también:

$\boldsymbol{G(x) = F(x) + C}$

Siguiendo el primer y segundo paso podemos llegar a la conclusión de que $\boldsymbol{F(x) + C}$ es la antiderivada general de $\boldsymbol{f(x)}$, y podemos llegar a la siguiente notación por definición de la integral indefinida de $\boldsymbol{f(x)}$.

$$\int \boldsymbol{f(x)\, dx = F(x) + C}$$

En términos de diferenciales podemos escribir de la siguiente manera:

$$\int \boldsymbol{F'(x)\, dx = F(x) + C}$$

$$\int \boldsymbol{dF(x) = F(x) + C}$$

Ya que $\boldsymbol{dF(x) = F'(x) = f(x)\, dx}$

Podemos decir que la integral indefinida de la diferencial de una función es igual a la función más una constante.

Podemos decir que, la integración indefinida puede ser considerada como la operación inversa de la operación que asigna una función su diferencial.

4.2.2 SUMATORIAS

Las sumatorias son una herramienta que se puede utilizar para aproximar funciones, pero tienen algunas limitaciones en comparación con otros métodos más potentes como las derivadas (Álvarez, 2010). Se expresan simbólicamente como:

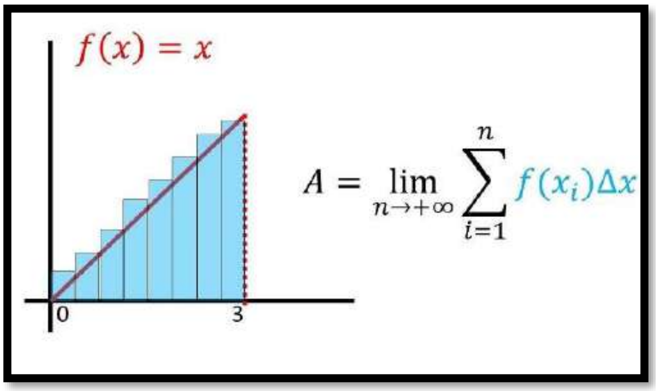
$$\sum f(x)$$

Pese a ser una de las primeras formas de calcular algunas funciones, existen varias razones de carácter matemático por las cuales es mejor utilizar la derivada en lugar de la sumatoria para estudiar la variación y el cambio de una función:

ISBN: 978-631-6557-36-0

- La derivada representa el límite del cociente incremental de una función cuando el incremento tiende a cero. Esto le da una fundamentación rigurosa basada en el concepto de límite.
- La derivada es una propiedad intrínseca de la función, mientras que la sumatoria es una aproximación externa. La derivada revela información sobre la tasa de cambio instantánea.
- Las derivadas se pueden calcular analíticamente utilizando reglas de derivación. Las sumatorias requieren un proceso numérico paso a paso menos eficiente.
- Las derivadas se comportan mejor en los extremos y puntos de inflexión al ser límites, mientras que las sumatorias pueden tener errores de aproximación.
- Las derivadas se prestan más fácilmente para el análisis matemático al poder utilizar teoremas como el de Rolle, el valor medio, la regla de L'Hôpital, entre otros.
- Conceptos avanzados como derivadas parciales y derivadas de orden superior serán imposibles de abordar solo mediante sumatorias.
- Las derivadas permiten encontrar máximos, mínimos y puntos de inflexión de manera exacta, algo mucho más complejo con sumatorias.

En conclusión, la diferenciación mediante límites que representan la derivada es una herramienta matemática más potente, elegante y precisa en comparación con el uso de sumatorias para estudiar la variación de funciones.



ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 4.1 Grafica de una función calculada por sumatoria

4.2.3 INTERPRETACIÒN DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida representa el área bajo una curva en un intervalo dado. A diferencia de la indefinida, se define entre límites de integración a y b, de allí su nombre:

$$\int_a^b f(x)$$

Geométricamente representa el área limitada por la curva de $f(x)$, el eje X, y las rectas x = a y x = b.

Para calcularla realizamos el siguiente proceso:

- Se divide el intervalo [a, b] en subintervalos
- Se aproxima el área con rectángulos
- Se toma el límite cuando el ancho tiende a 0

Conceptualmente, la integral definida acumula una cantidad infinitesimal representada por $f(x)$ sobre un intervalo específico.

En problemas concretos, primero se obtiene la integral indefinida de $f(x)$ y luego se evalúa entre límites [a, b] para calcular la magnitud deseada.

Las aplicaciones de la derivada definida incluyen: calcular áreas, volúmenes, longitudes de arco, en cuanto al análisis de funciones respecta, también se utiliza en física para determinar el trabajo mecánico, la masa, centroides, momentos, la carga eléctrica, y numerosas medidas (Kincaid, & Cheney, 2006).

4.2.4 TABLA DE INTEGRALES

Tabla de integración

Tabla 6. Integrales comunes

a)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,$	$x > 0 \quad n \neq 1$

ISBN: 978-631-6557-36-0

b)	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
c)	$\int a^x \, dx \ = \frac{a^x}{\ln\lvert a\rvert} + C$
d)	$\int e^x \ dx = e^x + C$
e)	$\int \sin x \ dx = \ -\cos x + C$
f)	$\int \cos x \ dx = \sin x + C$
g)	$\int \tan x \ dx = \ln\lvert\sec x\rvert + C = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
h)	$\int \cot x \ dx = -\ln\lvert\csc x\rvert + C = \ln\lvert\sin x\rvert + C$
i)	$\int \sec x \ dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$
j)	$\int \csc x \ dx = \ln\lvert\csc x - \cot x\rvert + C$
k)	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
l)	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$
m)	$\int \sec x \tan x \ dx = \sec x + C$
n)	$\int \csc x \ \cot x \, dx = -\csc x + C$
o)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc \ \sin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
p)	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arc \tan\left(\frac{x}{a}\right) + C$
q)	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a} arc \sec\left(\frac{x}{a}\right) + C$
r)	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
s)	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
t)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$

ISBN: 978-631-6557-36-0

u)	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} arc \sin\left(\frac{x}{a}\right) + C$
v)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$
w)	$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$
x)	$\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + C$

4.2.5 PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

La integral indefinida es un concepto fundamental en cálculo y tiene varias propiedades importantes. Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces se denota como $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, donde C es una constante arbitraria (Spiegel, 2009). Aquí hay algunas propiedades clave de la integral indefinida:

a. **Linealidad:** Si $f(x)$ son funciones y $g(x)$ y c es una constante, entonces

$$\int [c \cdot f(x) + g(x)]\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

b. **Regla de Potencias:** Para cualquier constante $n \neq -1$

$$\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$$

c. **Regla de la Suma y Resta:**

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

d. **Regla de la Multiplicación por Constante:**

$$\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x), dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

e. **Regla de la Sustitución**: Si $u = g(x)$ y $F(u)$ es una antiderivada de $f(u)$, entonces

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

f. **Cambio de Límites de Integración:** Si $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$ en un intervalo $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

g. **Propiedad de Cero:** Si $f(x)$ es continua en $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ y $F(x)$ es una antiderivada de $f(x)$, entonces

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

4.2.6 INTEGRACION POR CAMBIO DE VARIABLE

Permite calcular integrales indefinidas de la forma:

$$\int f(g(x))g'(x)dx.$$

Por eso, supongamos que P es una primitiva de f; podemos considerar $P'(x) = f(x)$ luego:

$$\int f(x)dx = P(x) + C.$$

La misma que nos conduce a una expresión general, $P\ og$ es una primitiva de $(f\ o\ g)g'$. En efecto:

$$(Pog) = P'\big(g(x)\big)g'(x)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$= f(g(x))g'(x).$$

Por lo tanto

$$\int f(g(x))g'(x)dx = P(g(x)) + C.$$

Observación:

Es muy común encontrar que $u = g(x)$ y entonces $du = g'(x)dx$; en cuyo caso $\int f(g(x))g'(x)dx$ Nos queda en $\int f(u)du = P(u) + C$; es decir que $\int f(g(x))g'(x)dx$ se ha transformado en una integral más simple con la sustitución que realizamos.

4.2.7 EJERCICIOS RESUELTOS POR CAMBIO DE VARIABLE

a. $\int \frac{a}{a-x}dx$

$u = a - x$ $du = -dx$	Cambio de variable
$-a\int \frac{du}{u}$	Se reemplaza en la integral
$-a\ ln(u) + c$	Se resuelve la integral
$-aln(a - x) + c$	Se devuelve a la variable original

b. $\int \frac{4t-6}{2t-1}dt$

$u = 2t - 1$ $du = 2dt$	Cambio de variable
	Se reemplaza en la integral

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$2\int \frac{2u - 2 - 6}{u}du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2u - 8}{u}du$$ Se resta

$$\frac{1}{2}\int \frac{2(u-4)}{u}du$$ Factor común

$$\int \frac{u - 4}{u}du$$ Se saca el dos y se simplifica

$$\int \frac{u}{u}du - \int \frac{4}{u}du$$ Se separa en dos integrales

Se resuelve la integral

$$u - 4\,ln|u|$$

$$2t - 1 - 4ln|2t - 1| + c$$ Se devuelve a la variable original

c. $\int \frac{x}{a + bx}dx$

$$\int \frac{u - a}{b^2u}du$$ Se reemplaza en la integral

$$\frac{1}{b^2}\left[\int \frac{u}{u}du - \int \frac{a}{u}du\right]$$ Se separa en dos integrales

$$\frac{1}{b^2}[u - aln(u)]$$ Se resuelve la integral

$$\frac{1}{b^2}[bx + a - aln(bx + a)] + c$$ Se devuelve a la variable original

d. $\int \frac{1 - 3x}{3 + 2x}dx$

$u = 3 + 2x$

$du = 2dx$ Cambio de variable

$$-\int \frac{3u - 9 - 2}{4u}du$$ Se reemplaza en la integral

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$-\frac{1}{4}\int \frac{3u\ -\ 11}{u}du$$ se suma

$$-\frac{1}{4}\int \frac{3u}{u}du - \int \frac{11}{u}du$$ se separa en dos integrales

$$-\frac{1}{4}(3u - 11ln(u))$$ Se resuelve la integral

$$-\frac{1}{4}[3(3+2x) - 11ln|3+2x|] + c$$ Se devuelve a la variable original

e. $\int \frac{ax-b}{ax+\beta}dx$

$$u = ax\ +\ \beta$$
$$du = adx$$ Cambio de variable

$$\int \frac{a(u-\beta)-b}{a^2u}du$$ Se reemplaza en la integral

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{au-a\beta-ab}{u}du$$ Se realiza algebra

$$\frac{1}{a^2}\int \frac{au}{u}du - \frac{1}{a^2}\int \frac{a\beta}{u}du - \frac{1}{a^2}\int \frac{ab}{u}du$$ Se separa en 3 integrales

$$\frac{1}{a^2}[au - a\beta ln|u| - abln|u|]$$ Se resuelve la integral

$$\frac{1}{a^2}[a(ax+\beta) - a\beta\ ln|ax+\beta| - \ ab\ ln|ax+\beta|] + c$$ Se devuelve a la variable original

f. $\int \frac{3t^2+3}{t-1}dt$

$$u =\ t-1$$ Cambio de variable
$$du = dt$$ Cambio de variable

$$3\int \frac{(u+1)^2+1}{u}du$$ Se reemplaza en la integral

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$3\int \frac{u^2+2u+2}{u}du$$ Se realiza algebra

$$3\left[\int \frac{u^2}{u}du + \int \frac{2u}{u}du + \int \frac{2}{u}du\right]$$ Se resuelve la integral

$$3\left[\frac{(t-1)^2}{2} - 2(t-1) + ln|t-1|\right] + c$$ Se devuelve a la variable original

g. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}dx$

$u = x+3$
$du = dx$ Cambio de variable

$$\int \frac{(u-3)^2+5(u-3)+7}{u}du$$ Se reemplaza en la integral

$$\int \frac{u^2-6u+9+5u-15+7}{u}du$$ Se realiza algebra

$$\int \frac{u^2}{u}du - \int \frac{u}{u}du + \int \frac{du}{u}$$ Se separa en 3 integrales

$$\frac{u^2}{2} - u + ln|u| + c$$ Se resuelve la integral

$$\frac{(x+3)^2}{2} - (x+3) + ln|x+3| + c$$ Se devuelve a la variable original

h. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}dx$

$u = x-1$
$du = dx$ Cambio de variable

$$\int \frac{(u+1)^4+(u+1)^2+1}{u}du$$ Se reemplaza en la integral

$$\int \frac{u^4+4u^3+6u^2+4u+1+u^2+2u+1+1}{u}du$$ Se realiza algebra

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\int \frac{u^4 + 4u^3 + 7u^2 + 6u + 3}{u} du$$ Se realiza algebra

$$\int \frac{u^4}{u} du + \int \frac{4u^3}{u} du + \int \frac{7u^2}{u} du + \int \frac{6u}{u} du - \int \frac{3}{u} du$$ Se separa en 5 integrales

$$\int u^3 du + 4\int u^2 du + 7\int udu + 6\int du - 3\int \frac{1}{u} du$$ Se simplifica

$$\frac{u^4}{4} + 4\frac{u^3}{3} + 7\frac{u^2}{2} + 6u + 3ln|u| + c$$ Se resuelve la integral

$$\frac{(x-1)^4}{4} + 4\frac{(x-1)^3}{3} + 7\frac{(x-1)^2}{2} + 6(x-1) + 3ln|x-1| + c$$ Se devuelve a la variable original

i. $\int (\boldsymbol{a} + \frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{x-a}})^2 \boldsymbol{dx}$

$$\int \frac{ax - a^2 + b^2}{x-a} dx$$

$u = x - a$
$du = dx$ Cambio de variable

$$\int (\frac{a(u+a) - a^2 + b^2}{u})^2 du$$ Se reemplaza en la integral

$$\int (\frac{au + b}{u})^2 du$$ Se realiza algebra

$$\int \frac{(au)^2 + 2abu + b^2}{u^2} du$$ Se abre el binomio

$$\int \frac{a^2u^2}{u^2} du + \int \frac{2abu}{u^2} du + \int \frac{b^2}{u^2} du$$ Se separa en 3 integrales

$$a^2 \int du + 2ab \int \frac{1}{u} du + b^2 \int \frac{1}{u^2} du$$ Se simplifica

$$a^2u + 2ab\ ln|u| + b^2(-\frac{1}{u}) + c$$ Se resuelve la integral

ISBN: 978-631-6557-36-0

$a^2(x-a)+2ab\ ln\|x-a\|+b^2(-\frac{1}{(x-a)})+c$	Se devuelve a la variable original

j. $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

$u=x+1$ $du=dx$	Cambio de variable
$\int \frac{u-1}{u^2}du$	Se reemplaza en la integral
$\int \frac{u}{u^2}du - \int \frac{1}{u^2}du$	Se separa en 2 integrales
$ln\|u\|-(-\frac{1}{u})+c$	Se resuelve la integral
$ln\|x+1\|+\frac{1}{x+1}+c$	Se devuelve a la variable original

4.2.8 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRALES POR CAMBIO DE VARIABLE

a) $\int \frac{bdy}{\sqrt{1-y}}dy$
b) $\int \sqrt{e^x-1}dx$
c) $\int \frac{1}{x^2+x}dx$
d) $\int \frac{1}{x\ln^2 x}dx$
e) $\int \sqrt{a-bx}\ dx$
f) $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$
g) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$
h) $\int \frac{xdx}{x^2-5}$
i) $\int \frac{xdx}{2x^2+3}$
j) $\int \frac{x^2dx}{1+x^6}$
k) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^6-1}}$
l) $\int ae^{-mx}dx$
m) $\int (e^t-e^{-t})\ dt$
n) $\int e^{-(x^2+1)}dx$

4.2.9 INTEGRACIÓN POR PARTES

ISBN: 978-631-6557-36-0

Sea h la función definida en $h(x) = f(x)g(x)$, f y g son derivables. La derivada de las funciones dice: $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Aquí h(x) es una primitiva de $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$; o sea

$$\int [h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx = h(x) + C$$

$$= f(x)g(x) + C$$

Por propiedades de la integral:

$\int f'(x)g(x)dx\ + \int f(x)g'(x) + C$,

Donde:

$$\int f'(x)g(x)dx\ = f(x)g(x)\ - \int f(x)g'(x)dx + C$$

En esta ecuación hacemos un cambio de variable $u = f(x), v = g(x)$ entonces $dv = f'(x)dx\ y\ dv = g'(x)dx$ entonces la fórmula se transforma en:

$$\int udv = uv - \int udv + C$$

La fórmula de integración por partes para las integrales definidas es:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Ejercicios propuestos

a. $\int \boldsymbol{x^n \cdot ln\, x \cdot dx}$ $\qquad \begin{matrix} u = ln\, x \\ dv = \ x^n dx \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$

$$\int x^n \cdot ln\, x \cdot dx = lnx \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} - \int \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{dx}{x} \rightarrow \frac{x^{n+1} \cdot ln\, x}{n+1} - \int \frac{x^n \cdot dx}{(n+1)}$$

$$\frac{x^{n+1} \cdot ln\, x}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int x^n \cdot dx \rightarrow \frac{x^{n+1} \cdot ln\, x}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \boldsymbol{x^n \cdot ln\, x \cdot dx}\ = \frac{\boldsymbol{x^{n+1} \cdot ln\, x}}{\boldsymbol{n+1}} - \frac{\boldsymbol{x^{n+1}}}{\boldsymbol{(n+1)^2}} + \boldsymbol{C}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

b. $\int \frac{ln^3x}{x^2} \cdot dx$ $\quad u = \ln^3 x, \; dv = x^{-2}dx \rightarrow \begin{cases} du = \frac{3\ln^2 x}{x}dx \\ v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int \frac{ln^3x}{x^{-2}} \cdot dx = -\frac{\ln^3 x}{x} + 3\int \frac{\ln^2 x}{x^2} \cdot dx$ $\quad u = \ln^2 x, \; dv = x^{-2}dx \rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$\int \frac{ln^3x}{x^{-2}} \cdot dx = -\frac{\ln^2 x}{x} - \frac{\ln^3 x}{x} + 6\int \frac{\ln x}{x^2} \cdot dx$ $\quad u = ln\, x, \; dv = x^{-2}dx \rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\int \frac{ln^3x}{x^{-2}} \cdot dx = -\frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{\ln^3 x}{x} - \frac{6lnx}{x} + 6\int x^{-2} \cdot dx$$

$$\boldsymbol{\int \frac{ln^3x}{x^{-2}} \cdot dx = -\frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{\ln^3 x}{x} - \frac{6lnx}{x} + \frac{6}{x} + C}$$

c. $\int \frac{ln^2x}{x^{5/3}} \cdot dx$ $\quad u = \ln^2 x, \; dv = x^{-5/3}dx \rightarrow \begin{cases} du = \frac{2\ln x}{x}dx \\ v = -\frac{3}{2x^{-2/3}} \end{cases}$

$\int \frac{ln^2x}{x^{\frac{5}{3}}} . dx = -\frac{3\ln^2 x}{2x^{-\frac{2}{3}}} + 3\int \frac{lnx}{x^{1/3}} \cdot dx$ $\quad u = ln\, x, \; dv = x^{-5/3}dx \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = -\frac{3}{2x^{-2/3}} \end{cases}$

$$\int \frac{ln^2x}{x^{\frac{5}{3}}} . dx = -\frac{3\ln^2 x}{2x^{-\frac{2}{3}}} - \frac{9lnx}{2} + \frac{9}{2}\int \frac{lnx}{x^{2/3}x} \cdot dx$$

$$\int \frac{ln^2x}{x^{\frac{5}{3}}} . dx = -\frac{3\ln^2 x}{2x^{-\frac{2}{3}}} + \frac{9lnx}{2} - \frac{9}{2}\left(\frac{3}{2x^{\frac{2}{3}}}\right) + C$$

$$\int \frac{ln^2x}{x^{\frac{5}{3}}} . dx = -\frac{3\ln^2 x}{2x^{-\frac{2}{3}}} + \frac{9lnx}{2} - \frac{27}{4x^{\frac{2}{3}}} + C$$

d. $\int \frac{ln[cosx]}{cos^2x} \cdot dx$ $\quad u = \ln\,[cosx], \; dv = \cos^2 x \cdot dx \rightarrow \begin{cases} du = \frac{-senx}{cosx}dx = -tg(x) \cdot dx \\ v = tg(x) \end{cases}$

$$\int \frac{\ln\,[cosx]}{\cos^2 x} . dx = tg(x)\ln[cosx] + \int tg^2x \cdot dx$$

$$\int \frac{\ln\,[cosx]}{\cos^2 x} . dx = tg(x)\ln[cosx] + \int tg^2x \cdot dx \rightarrow tg(x)\ln[cosx] + \int (sec^2x - 1) \cdot dx$$

$$\boldsymbol{\int \frac{\ln\,[cosx]}{\cos^2 x} . dx = tg(x)\ln[cosx] + tg(x) - x + C}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

e. $\int(\boldsymbol{x^2-2x+3})\boldsymbol{lnx\cdot dx}$ $\quad \begin{matrix} u = ln\,x \\ dv = (x^2-2x+3)dx \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \end{cases}$

$$\int(x^2-2x+3)lnx\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)ln\,x - \int\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\frac{dx}{x}$$

$$\int(x^2-2x+3)lnx\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)ln\,x - \int\left(\frac{x^2}{3}-x+3\right)dx$$

$$\boldsymbol{\int(x^2-2x+3)lnx\cdot dx = \left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)ln\,x - \frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x+C}$$

f. $\int\boldsymbol{x^3\cdot ln^2\,x\cdot\ dx}$ $\quad \begin{matrix} u = ln^2\,x \\ dv = x^3dx \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{2ln(x)}{x}dx \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\int x^3\cdot ln^2\,x\cdot\ dx = \frac{x^4\,ln^2\,x}{4} - \int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{2ln(x)}{x}dx$$

$\int x^3\cdot ln^2\,x\cdot\ dx = \frac{x^4\,ln^2\,x}{4} - \frac{1}{2}\int x^3 ln(x)\,dx$ $\quad \begin{matrix} u = ln\,x \\ dv = x^3dx \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} du = \frac{dx}{x} \\ v = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$\int x^3\cdot ln^2\,x\cdot\ dx = \frac{x^4\,ln^2\,x}{4} - \frac{x^4lnx}{8} - \frac{1}{2}\int\frac{x^4dx}{4x} \rightarrow \frac{x^4\,ln^2\,x}{4} - \frac{x^4lnx}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right)\int x^3dx$$

$$\boldsymbol{\int x^3\cdot ln^2\,x\cdot\ dx = \frac{x^4\,ln^2\,x}{4} - \frac{x^4lnx}{8} + \frac{x^4}{32} + C}$$

Ejercicios propuestos

a. $\int\boldsymbol{ln^2\,x\cdot\ dx}$

b. $\int\boldsymbol{\frac{x\,lnx}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\ dx}$

c. $\int\boldsymbol{xln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot\ dx}$

d. $\int\boldsymbol{\frac{lnx}{x^3}\cdot\ dx}$

e. $\int\boldsymbol{\frac{ln(lnx)}{x}\cdot\ dx}$

f. $\int\boldsymbol{Ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{1+x}\right)\cdot\ dx}$

g. $\int\boldsymbol{\frac{ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}\cdot\ dx}$

h. $\int\boldsymbol{(7+x-3x^2)e^{-x}\cdot\ dx}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

i. $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} \cdot dx$

j. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^3} \cdot dx$

k. $\int (2x-3)(x^2-3x-1)^4 ln(x^2-3x-1) \cdot dx$

l. $\int x^2 e^{-x} dx$

m. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}} dx$

n. $\int (x^2-2x+5)e^{-x} dx$

o. $\int (x^3-3x)e^{6x} dx$

p. $\int \frac{3x^2+2x-1}{4e^{3x}} dx$

q. $\int (8x^3+6x^2+2x+5)e^{4x} dx$

r. $\int arctg\sqrt{x} dx$

s. $\int x\, arctg^2\, x dx$

t. $\int \frac{arctgx}{x^2(1+x^2)} dx$

u. $\int \frac{arctgx}{x^2} dx$

v. $\int x^2 arctg3x dx$

w. $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2} e^x dx$

x. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln(\frac{x+1}{x-1})\, dx$

4.2.10 INTEGRACIÓN QUE CONTIENEN UN CUADRADO

Si la integral contiene una expresión cuadrática ax^2+bx+c, completar el cuadrado puede producir una integral que sea posible expresar en términos de una función trigonométrica inversa o una función hiperbólica inversa.

$$1.- \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} \quad 2.\text{-} \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} \quad 3.\text{-} \int \frac{(ax+b).dx}{cx^2+dx+e} \quad 4.\text{-} \int \frac{(ax+b).dx}{\sqrt{cx^2+dx+e}}$$

Las integrales de la forma 1 y 2 se calculan completando cuadrado en el trinomio:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$ax^2+bx+c=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c=a(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2})+c\ -\frac{b^2}{4a}$$

$$=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

Es decir:

$$\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}]}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}}}$$

Para las integrales de la forma 3 y 4 se debe acomodar la expresión $ax+b$ de la siguiente manera:

$$ax+b=\frac{a}{2c}[2cx+d]-\frac{ad}{2c}$$

Como se observa la expresión $2cx\ +\ d$ es la derivada del trinomio cuadrado, luego reemplazamos en la integral:

$$\int\frac{(ax+b)dx}{cx^2+dx+e}=\frac{a}{2c}\int\frac{(2cx+d)dx}{cx^2+dx+e}+(b-\frac{ad}{2c})\int\frac{dx}{cx^2+dx+e}$$

Aplicando la fórmula:

$$\int\frac{dx}{x}=ln|x|\ +\ C$$

Ejercicios resueltos:

a. $\int\frac{(6-2x)dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}$

$$l=\int\frac{(6-2x)dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}\qquad\qquad u=8-4x-4x^2\ \rightarrow du=(-4-8x)dx$$

$$\frac{du}{4}=(-1-2x)dx\ ;l=\int\frac{7dx}{\sqrt{(8-4x-x^2)}}+\int\frac{(-1-2x)dx}{\sqrt{8-4x-4x^2}}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$l = \int \frac{7}{\sqrt{4(2 - x - x^2)}} + \int \frac{\frac{dx}{4}}{\sqrt{u}}$$

$$l = \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2 - (x^2 + x)}} + \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$l = \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{2 - (x + 1/2)^2 + 1/4}} + \frac{1}{4}\int u^{-\frac{1}{2}}du$$

$$l = \frac{7}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{9/4 - (x + 1/2)^2}} + \frac{u^{\frac{1}{2}}}{4\left(\frac{1}{2}\right)} + C$$

$$l = \frac{7}{2}Arcsen\left(\frac{x + 1/2}{3/2}\right) + \frac{\sqrt{8 - 4x - 4x^2}}{2} + C$$

$$l = \frac{7}{2}Arcsen\left(\frac{2x + 1}{3}\right) + \frac{\sqrt{8 - 4x - 4x^2}}{2} + C$$

b. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+2x+5}$ $\qquad si\ u = x^2 + 2x + 5 \qquad \rightarrow \quad du = (2x + 2)dx$

$$l = \int \frac{(2x + 2)dx}{x^2 + 2x + 5} + 3\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

$$l = \int \frac{du}{u} + 3\int \frac{dx}{(x + 1)^2 - 1 + 5} = Ln|u| + 3\int \frac{dx}{(x + 1)^2 + 4}$$

$$l = ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{3}{2}Arctg\left(\frac{x + 1}{2}\right) + C$$

c. $\int \frac{dx}{5x^2-20x+23}$

$$l = \int \frac{dx}{5x^2 - 20 + 23} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 - 4x + \frac{23}{5}}$$

$$l = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x - 2)^2 - 4 + \frac{23}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x - 2)^2 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{5\sqrt{\frac{3}{5}}}\ Arctg\left(\frac{x - 2}{\sqrt{\frac{3}{5}}}\right) + C$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$l=\frac{1}{\sqrt{\frac{3(25)}{5}}}Arctg\left(\sqrt{\frac{5}{3}}(x-2)\right)+C=\frac{1}{\sqrt{15}}Arctg\left(\sqrt{\frac{5}{3}}(x-2)\right)+C$$

d. $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2-2x+4}}$

$$l=\int\frac{dx}{x^2-2x+4} \qquad complementando\ cuadrados$$

$$l=\int\frac{dx}{(x-1)^2-1+4}$$

$$l=\int\frac{dx}{(x-1)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}Arctg\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

e. $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{-5-12x-3x^2}}}$

$$l=\int\frac{dx}{-5-12x-3x^2} \qquad complementando\ cuadrados\ l$$

$$l=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(-\frac{5}{3}-4x-x^2\right)}}$$

$$l=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{-\frac{5}{3}-(x^2+4x)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{-5/3-(x+2)^2+4}}+C$$

$$l=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{7}{3}-(x+2)^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}Arcsem\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$l=\frac{1}{\sqrt{3}}Arcsen\left(\sqrt{\frac{3}{7}}(x+2)\right)+C$$

Ejercicios propuestos

1. $\int \frac{\boldsymbol{(x^2+1)dx}}{\boldsymbol{(x+2)^2}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

2. $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2+2x+2}$

3. $\int \frac{(3x-5)dx}{x^2-8x+42}$

4. $\int \frac{5x+3}{x^2+4x+4}dx$

5. $\int \frac{5x+3}{x^2+4x+4}dx$

4.2.11 INTEGRACIÓN DE LAS FUNCIONES IRRACIONALES

En general se trata de eliminar la raíz de la función a integrar a través de un cambio de variable. En algunas funciones no será necesario eliminar la raíz (Diego, 2015).

Existen integrales simples en el que las funciones irracionales afecten solamente a monomios en la variable x, permitiendo además que las raíces que aparezcan posean índices distintos. Así:

$$I = \int R(x, x^{\frac{p}{q}},\ x^{\frac{t}{s}}, \dots, x^{\frac{u}{y}})\ dx$$

Donde por R denotamos la función que van a aparecer las raíces de x. Para desaparecer los índices de las raíces debemos realizar un cambio de variable:

$$x = t^N, donde\ N =\ m.c.m(q, s, \dots v), y, por\ tan, dx = Nt^{N-1}dt$$

4.2.12 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

a) $\int \sqrt{(x^2-1)^3}\,dt$

$\int (x^2-1)\sqrt{(x^2-1)}dt$ $\qquad$ $t^2 = x^2 - 1$

$\int (t^2)\,(t)\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$ $\qquad$ $dx = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}dt$

$\int \frac{t^4}{\sqrt{t^2+1}}dt$

$\int \frac{(t^2-1)(t^2+1)+1}{\sqrt{t^2+1}}dt$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$\int (t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}$

$\int (t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt + lnt + \sqrt{t^2+1}$+1

b) $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\sqrt{\boldsymbol{x^2+9)^3}}}$ $\qquad x = \frac{1}{t}$

$x = \frac{1}{t^2}$

$= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1}{t^2}+9\right)\left(\frac{1}{t^2}+9\right)}}$ $\qquad dx = -\frac{dt}{t^2}$

$= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\left(\frac{1+9t^2}{t}\right)\left(\frac{1+9t^2}{t^2}\right)} = -\int \frac{tdt}{1+9t^2}$ $\qquad 1+9t^2 = t^2$

$= -\int \frac{\frac{tdt}{9}}{t^2(t)} = -\frac{1}{9}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{9t} = \frac{1}{9\sqrt{1+9t^2}}$ $\qquad 18tdt = 2tdt$

$= \frac{1}{\sqrt{1+9\left(\frac{1}{x^2}\right)}} = \frac{1}{9\sqrt{\frac{x^2+9}{x}}} = \frac{x}{9\sqrt{x^2+9}} + c$ $\qquad 9tdt = tdt$

$tdt = \frac{tdt}{9}$

c) $\int \sqrt{\boldsymbol{4-x^2}}\,\boldsymbol{dx}$

$= \int x\sqrt{4-x}\,dx = \int (4-t^2)\,t(-2t)dt$ $\qquad -4x = 1$ $\qquad x =$
$4-t^2$

$= -\int (4-t^2\,dt = -4\int t^2\,dt + \int t^2dt = -\frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ $\qquad -4x = 2tdt$

$= -\int \frac{4}{3}\sqrt{(4-x)^3} + \frac{1}{5}\sqrt{(4-x)^3} + c$ $\qquad dx = -2tdt$

4.2.13 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

a) $\int \sqrt{\boldsymbol{x^2-2x+10}}\,\boldsymbol{dx}$

b) $\int \sqrt{(\boldsymbol{3-2x}-\boldsymbol{x^2})^3}\boldsymbol{dx}$

c) $\int \frac{\boldsymbol{x^3dx}}{\sqrt{\boldsymbol{a^2-x^2}}}$

d) $\int \boldsymbol{x^5(-3+2x^2)^{\frac{3}{2}}dx}$

e) $\int \boldsymbol{x^2}\sqrt{\boldsymbol{4-x^2}} - \boldsymbol{d}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.2.14 INTEGRACION DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Para las integrales:

$$\int sen^n(x)dx, \qquad \int cos^n(x)dx, \qquad \int tg^n(x)dx, \qquad \int ctg^n(x)dx$$

$$\int sen^m(x).cos^n(x)dx, \qquad \int tg^n(x).sec^m(x)dx, \qquad \int ctg^n(x).csc^m(x)dx$$

h. Para calcular las integrales

$$\int sen^n(x)dx, \qquad \int cos^n(x)dx$$

- Si n es par y entero positivo se utilizarán las identidades:

$$sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2} \qquad cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$$

- Si n es impar y entero positivo, primero cambiaremos la integral de la siguiente forma:

$$\int sen^n(x)dx = \int sen^{n-1}(x).sen(x)dx$$

$$\int cos^n(x)dx = \int cos^{n-1}(x).cos(x)dx$$

Para luego utilizar la identidad:

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1$$

- **Para calcular las integrales**

$$\int tg^n(x)dx, \qquad \int ctg^n(x)dx$$

- Si n es par y entero positivo, las integrales tomaran la siguiente forma:

$$\int tg^n(x)dx = \int tg^{n-2}(x).tg(x)dx$$

$$\int ctg^n(x)dx = \int ctg^{n-2}(x).ctg(x)dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Para poder utilizar las identidades:

$$\mathbf{1}+\boldsymbol{tg^{2}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{sec^{2}}(\boldsymbol{x}), \qquad \mathbf{1}+\boldsymbol{ctg^{2}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{csc^{2}}(\boldsymbol{x})$$

- Si n es impar y entero positivo, cambiaremos la integral de la siguiente forma:

$$\int \boldsymbol{tg^{n}(x)dx}=\int \boldsymbol{tg^{n-1}(x).tg(x)dx}=\int [\boldsymbol{tg^{2}(x)}]^{\frac{n-1}{2}}.\boldsymbol{tg(x)dx}$$

$$\int \boldsymbol{ctg^{n}(x)dx}=\int \boldsymbol{ctg^{n-1}(x).ctg(x)dx}=\int [\boldsymbol{ctg^{2}(x)}]^{\frac{n-1}{2}}.\boldsymbol{ctg(x)dx}$$

Para luego utilizar las identidades:

$$\mathbf{1}+\boldsymbol{tg^{2}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{sec^{2}}(\boldsymbol{x}), \qquad \mathbf{1}+\boldsymbol{ctg^{2}}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{csc^{2}}(\boldsymbol{x})$$

- **Para calcular las integrales**

$$\int \boldsymbol{sen^{m}(x).cos^{n}(x)dx}$$

- Si cualquiera de los exponentes, n o m, es un número impar y entero positivo y el otro exponente sea un numero cualquiera se desarrolla:

$$\int \boldsymbol{sen^{m}(x).cos^{n}(x)dx}=\int \boldsymbol{sen^{m-1}(x).cos^{n}(x).sen(x)dx}$$

$$\int \boldsymbol{sen^{m}(x).cos^{n}(x)dx}=\int \boldsymbol{sen^{m}(x).cos^{n-1}(x).cos(x)dx}$$

Y luego utilizamos la identidad:

$$\boldsymbol{sen^{2}(x)+cos^{2}(x)=1}$$

- Si n y m son pares y enteros positivos utilizaos las siguientes identidades:

$$\boldsymbol{sen^{2}(x)}=\frac{\mathbf{1}-\boldsymbol{cos(2x)}}{\mathbf{2}}, \qquad \boldsymbol{cos^{2}(x)}=\frac{\mathbf{1}+\boldsymbol{cos(2x)}}{\mathbf{2}}$$

De esta manera la integral $\int \boldsymbol{sen^{m}(x).cos^{n}(x)dx}$ se convierte en una integral de la forma $\int \boldsymbol{sen^{m}(x)dx}$ cuya resolución ya fue repasada.

ISBN: 978-631-6557-36-0

- **Para calcular las integrales**

  $\int \boldsymbol{tg^n(x).sec^m(x)dx}$, $\int \boldsymbol{ctg^n(x).csc^m(x)dx}$

  - Si n es un número impar y entero positivo y m sea un numero cualquiera, las integrales tomaran la siguiente forma:

  $$\int tg^n(x).sec^m(x)dx = \int tg^{n-1}(x).sec^{m-1}(x).tg(x).sec(x)dx$$

  $$\int ctg^n(x).csc^m(x)dx = \int ctg^{n-1}(x).csc^{m-1}(x).ctg(x).csc(x)dx$$

  Para luego utilizar las identidades:

  $\boldsymbol{1 + tg^2(x) = sec^2(x)}$, $\boldsymbol{1 + ctg^2(x) = csc^2(x)}$

Si m es un numero par y entero positivo y n sea un numero cualquiera, las integrales tomaran la siguiente forma:

$$\int tg^n(x).sec^m(x)dx = \int tg^n(x).sec^{m-2}(x).sec^2(x)dx$$

$$\int ctg^n(x).csc^m(x)dx = \int ctg^n(x).csc^{m-2}(x).csc^2(x)dx$$

Y luego utilizamos las identidades:

$\boldsymbol{1 + tg^2(x) = sec^2(x)}$, $\boldsymbol{1 + ctg^2(x) = csc^2(x)}$

4.2.15 INTEGRALES TRIGONOMETRICAS

$$\int sen(mx)\cos(nx)dx, \quad \int sen(mx)\,\text{sen}(nx)dx, \quad \int cos(mx)\cos(nx)dx$$

Se utilizarán las siguientes fórmulas para la resolución de estas integrales:

$$sen(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[sen((m+n)x) + sen((m-n)x)]$$

$$sen(mx)\,\text{sen}(nx) = \frac{1}{2}[cos((m-n)x) - cos((m+n)x)]$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\boldsymbol{cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}[cos((m-n)x) + cos((m+n)x)]}$$

Ejercicios resueltos

a. $\int \boldsymbol{sen^4(x)dx}$

$$= \int \left(sen^2(x)\right)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos(2x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x) + cos^2(2x))dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{4}\int cos^2(2x)dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(4x)}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos(4x))dx$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}sen(4x) + C$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}sen(2x) + \frac{1}{32}sen(4x) + C$$

b. $\int \boldsymbol{cos^5(x)dx}$

$$= \int (cos^2(x))^2\cos(x)dx$$

$$= \int \left(1-sen^2(x)\right)^2\cos(x)dx$$

$$= \int (1-2sen^2(x) + sen^4(x))\cos(x)dx$$

$$= \int 1dx - 2\int sen^2(x)\cos(x)\,dx + \int sen^4(x)\cos(x)dx$$

$$= x - \frac{2}{3}sen^3(x)\frac{2}{5}sen^5(x) + C$$

c. $\int \boldsymbol{cos^4(3x)dx}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\int (cos^2(3x))^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1+\cos(6x)}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+\cos(6x))^2 dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos(6x)+cos^2(6x))dx$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \cos(6x)dx + \frac{1}{4}\int cos^2(6x)dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(12x)}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos(12x))dx$$

$$= \frac{1}{4}x + \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}sen(12x) + C$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{96}sen(12x) + C$$

d) $\int \boldsymbol{tg^6(x)dx}$

$$= \int (tg^2(x))^3 dx$$

$$= \int (sec^2(x)-1)^3 dx$$

$$= \int (sec^6(x) - 3sec^4(x) + 3sec^2(x) - 1)dx$$

$$= \int sec^6(x)dx - 3\int sec^4(x)dx + 3\int sec^2(x)dx - \int 1dx$$

$$= \int (sec^2(x))^2 sec^2(x)dx - 3\int sec^2(x)sec^2(x)dx + 3tg(x) - x$$

$$= \int (tg^2(x)-1)^2 sec^2(x)dx - 3\int (tg^2(x)-1)sec^2(x)dx + 3tg(x) - x$$

$$= \int (tg^4(x) - 2tg^2(x) + 1)sec^2(x)dx - 3\int tg^2(x)sec^2(x)dx + 3\int sec^2(x)dx + 3tg(x) - x$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$= \int tg^4(x)sec^2(x)dx - 2\int tg^2(x)sec^2(x)dx + \int sec^2(x)dx - tg^3(x) + 3tg(x) + 3tg(x) - x$$

$$= \frac{1}{5}tg^5(x) - \frac{1}{3}tg^3(x) + tg(x) - x + C$$

e) $\int (\boldsymbol{sen^2(3x) + cos(3x)})^2 \boldsymbol{dx}$

$$= \int (sen^4(3x) + 2sen^2(3x)cos(3x) + cos^2(3x))dx$$

$$= \int sen^4(3x)dx + 2\int sen^2(3x)cos(3x)dx + \int cos^2(3x)dx$$

$$= \int (sen^2(3x))^2dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \int \frac{1+\cos(6x)}{2}dx$$

$$= \int \left(\frac{1-\cos(6x)}{2}\right)^2 dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \int \frac{1+\cos(6x)}{2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos(6x))^2dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}\int 1dx + \frac{1}{2}\int \cos(6x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos(6x) + cos^2(6x))dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen(6x)$$

$$= \frac{1}{4}\int 1dx - \int \cos(6x)dx + \frac{1}{4}\int cos^2(6x)dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen(6x)$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{4}\int \frac{1+\cos(12x)}{2}dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen(6x)$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{8}\int (1+\cos(12x))dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen(6x)$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{8}\int 1dx + \frac{1}{8}\int \cos(12x)dx + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen(6x)$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{12}sen(6x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{96}sen(12x) + \frac{2}{9}sen^3(3x) + \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}sen(6x) + C$$

$$= \frac{7}{8}x + \frac{1}{96}sen(12x) + \frac{2}{9}sen^3(3x) + C$$

Ejercicios propuestos

a. $\int sen^6(2x)dx$

b. $\int sen^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$

c. $\int cos^6(3x)dx$

ISBN: 978-631-6557-36-0

d. $\int tg^6(x)dx$

e. $\int tg^3(x)dx$

f. $\int ctg^4(3x)dx$

g. $\int ctg^3(2x)dx$

h. $\int sen^4(x)dx$

i. $\int cos^5(x)dx$

j. $\int cos^4(3x)dx$

k. $\int sen^6(2x)dx$

l. $\int sen^5\left(\frac{x}{2}\right)dx$

m. $\int (sen^2(3x) + cos(3x))^2 dx$

n. $\int cos^6(3x)dx$

o. $\int xcos^3(x^2)dx$

p. $\int tg^6(x)dx$

q. $\int ctg^5(x)dx$

r. $\int tg^3(x)dx$

s. $\int ctg^4(3x)dx$

t. $\int ctg^3(2x)dx$

u. $\int ctg^5(2x)dx$

v. $\int ctg^3\left(\frac{x}{3}\right)dx$

w. $\int tg^5(3x)dx$

x. $\int ctg^4(2x)dx$

4.2.16 INTEGRALES POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

Para una función racional R y u=f(x), podremos resolver una integral realizando una sustitución trigonométrica en los tipos de integrales:

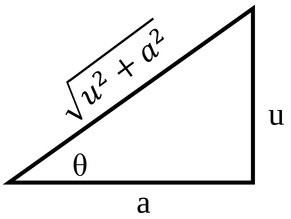
ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\int R\left(u,\sqrt{u^2+a^2}\right)du, \qquad \int R\left(u,\sqrt{a^2-u^2}\right)du, \qquad \int R\left(u,\sqrt{u^2-a^2}\right)du$$

En la forma:

$$\int R\left(u,\sqrt{u^2+a^2}\right)du$$

En el triángulo tomamos:



$tg(\theta) = \frac{u}{a}$

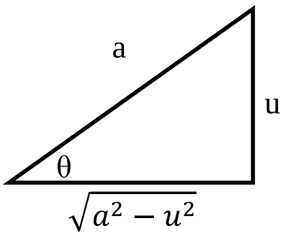
$u = a.tg(\theta)$ ➡ $\theta = arctg(\frac{u}{a})$

$a.sec^2(\theta)d\theta$ $\quad du =$

En la forma:

$$\int R\left(u,\sqrt{a^2-u^2}\right)du$$

En el triángulo tomamos:



$sen(\theta) = \frac{u}{a}$

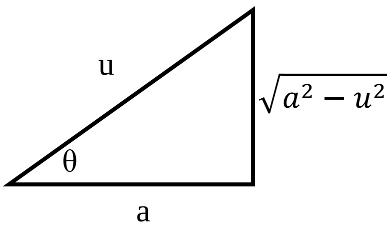
$u = a.sen(\theta)$ ➡ $\theta = arcsen(\frac{u}{a})$

$a.\cos(\theta)d\theta$ $\quad du =$

En la forma:

$$\int R\left(u,\sqrt{u^2-a^2}\right)du$$

En el triángulo tomamos:



$sec(\theta) = \frac{u}{a}$ ➡ $\theta = arcsec(\frac{u}{a})$

$u = a.sec(\theta)$ $\quad du =$

$a.\sec(\theta)tg(\theta)d\theta$

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.2.17 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA

$$\int \frac{\mathbf{x^2}}{\sqrt{\mathbf{9-x^2}}}\mathbf{dx}$$

Aplicamos sustitución trigonométrica:

$$x = 3\text{sen}\emptyset$$

$$dx = 3\cos\emptyset\ d\emptyset$$

En la integral:

$$\int \frac{9\text{sen}^2\emptyset}{\sqrt{9-\text{sen}^2\emptyset}}\ 3\cos\emptyset d\emptyset$$

Factor común:

$$\int \frac{27\ \text{sen}^2\emptyset\ \cos\emptyset}{\sqrt{9(1-\text{sen}^2\emptyset)}}d\emptyset$$

Aplicar identidad trigonométrica:

$$\int \frac{27\ \text{sen}^2\emptyset\ \cos\emptyset}{3\sqrt{\cos^2\emptyset}}d\emptyset$$

Simplificamos la raíz:

$$\int \frac{9\ \text{sen}^2\emptyset\ \cos\emptyset}{\cos\emptyset}d\emptyset$$

Simplificamos términos:

$$\int 9\text{sen}^2\emptyset\ d\emptyset$$

Aplicar identidad trigonométrica:

$$\int 9\ \frac{1-\cos 2\emptyset}{2}d\emptyset$$

Salen las constantes:

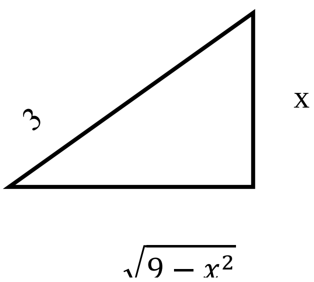
$$\frac{9}{2}\int 1-\cos 2\emptyset\ d\emptyset$$

Resolver las integral:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{9}{2}\emptyset - \frac{9}{4}\text{sen}2\emptyset + c$$

Volver a la variable original:



$$\emptyset = \text{arcsen}\frac{x}{3}$$

$$\text{sen}2\emptyset = \text{sen }2\text{arcsen}\frac{x}{3}$$

$$\text{sen}2\emptyset = 2\text{ sen arcsen}\frac{x}{3}\cos\text{arcsen}\frac{x}{3}$$

$$\text{sen}2\emptyset = \frac{2x}{3}\,\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$$

$$\text{sen}2\emptyset = \frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9}$$

En la integral:

$$\frac{9}{2}\text{arcsen}\frac{x}{3} - \frac{9}{4}\frac{2x\sqrt{9-x^2}}{9} + c$$

Simplificar términos:

$$\frac{9}{2}\text{arcsen}\frac{x}{3} - \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + c$$

$$\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)^3}}dx}$$

$$x = 2\text{sen}\theta$$

$$dx = 2\cos\theta$$

En la integral:

$$\int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{(4-4\text{sen}^2\theta)^3}}d\theta$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Factor común:

$$\int \frac{2\cos\theta}{\sqrt{(4(1-\operatorname{sen}^2\theta))^3}}d\theta$$

$$\int \frac{2\cos\theta}{8\sqrt{(1-\operatorname{sen}^2\theta))^3}}d\theta$$

Identidad trigonométrica:

$$\int \frac{\cos\theta}{4\sqrt{(\cos^2\theta)^3}}d\theta$$

Simplificamos:

$$\int \frac{\cos\theta}{4\cos^3\theta}d\theta$$

Sale la constante:

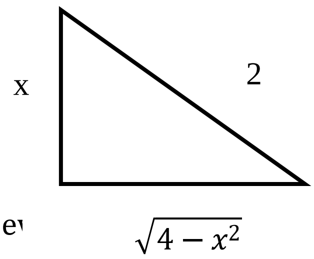
$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$\frac{1}{4}\int \sec^2\theta d\theta$$

Integral inmediata:

$$\frac{1}{4}\tan\theta + C$$

Triángulo rectángulo:



Dev nal:

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.2.18 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRALES POR SUSTITUCION TRIGONOMETRICA

a) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+4}$$

b) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\,dx$$

c) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4x-x^2)^3}}$$

d) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$$

f) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos^2(x)}dx$$

g) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{\tan(x)}{\sec^2(x)}dx$$

h) Resuelva la siguiente integral:

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)+\sin(x)+1}dx$$

4.2.19 INTEGRACION DE FUNCIONES RACIONALES

Las integrales racionales son las que llevan el cociente de dos funciones, o sea:

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Cuando B(x) es menor a C(x) estamos hablando de una función racional propia:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$$

- Para integrales de la forma:

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx$$

Completamos los cuadrados del denominador:

$$ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$$

Realizamos una sustitución:

$$z = x + \frac{b}{a}$$

$$\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{mz + n}{a(z^2 + n)} dz = \frac{m}{a} \int \frac{zdz}{z^2 + n} + \frac{n}{a} \int \frac{dz}{z^2 + n}$$

Para posteriormente resolverlas como integrales de tabla.

- Cuando en $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ Q(x) se descompone en factores lineales distintos:

$$Q(x) = a_n(x - \propto_1)(x - \propto_2) \dots (x - \propto_n)$$

Tendremos que representarlos con una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int \left(\frac{A_1}{x - \propto_1} + \frac{A_2}{x - \propto_2} \dots \frac{A_n}{x - \propto_n} \right) dx$$

- Cuando en $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ Q(x) se descompone en factores lineales que pueden repetirse:

$$Q(x) = a_n(x - a)(x - a) \dots (x - a)\left(x - \propto_{p.1}\right) \dots (x - \propto_n)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Tendremos que representarlos con una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(x-a)^p} + \frac{A_{p+1}}{x-\propto_{n-1}} + \cdots + \frac{A_n}{x-\propto_n}\right)dx$$

- Cuando en $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ Q(x) se descompone en factores lineales y cuadráticos que no se pueden reducir y no se repiten:

$$Q(x) = a_n(x^2 + b_1 + c_1)(x^2 + b_2 + c_2)(x^2 + b_3 + c_3)(x-\propto_4)\ldots(x-\propto_n)$$

Tendremos que representarlos con una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1x + B_1}{x^2 + b_1 + c_1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + b_2 + c_2} + \frac{A_3x + B_3}{x^2 + b_3 + c_3} + \frac{A_n}{x-\propto_n} \ldots + \frac{A_n}{x-\propto_n}\right)dx$$

- Cuando en $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ Q(x) se descompone en factores lineales y cuadráticos que se repiten, de igual manera los factores cuadráticos que no se pueden reducir se repiten:

$$Q(x) = a_n(x^2 + b + c)^2(x-\propto_3)\ldots(x-\propto_n)$$

Tendremos que representarlos con una suma de fracciones simples:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int \left(\frac{A_1x + B_1}{x^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \frac{A_3}{x-\propto_3} + \cdots + \frac{A_n}{x-\propto_n}\right)dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.2.20 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

a) $\int \frac{(2x^2-5)dx}{x^4-5x^2+6}$

$$\int \frac{2x^2-5}{(x^2-3)(x^2-2)}dx$$

$$\frac{2x^2-5}{(x^2-3)(x^2-2)} = \frac{Ax+B}{x^2-3} + \frac{Cx+D}{x^2-2} = \frac{(Ax+B)(x^2-2)+(Cx+D)(x^2-2)}{(x^2-3)(x^2-2)}$$

$$2x^2-5 = (Ax+B)(x^2-2)+(Cx+D)(x^2-3)$$

$$2x^2-5 = Ax^3-2Ax+Bx^2-2B+Cx^3-3Cx+Dx^2-3D$$

$$2x^2-5 = (A+C)x^3+(B+C)x^2+(-2A-3C)x+(-2B-3D)$$

$$\begin{array}{lll} x^3 & 0= & A+C \\ x^1 & 2= & B+D \\ x^1 & 0= & -2A-3C \end{array} \qquad \begin{array}{lll} A & = & -C \\ O & = & -2(-C)-3C \\ O & = & -C \end{array}$$

$$x^0 \quad \text{-}5= \quad \text{-}2B\text{-}3D \qquad \begin{array}{lll} C & = & O \\ A & = & O \end{array}$$

B=2-D B=1

-5=-2(2-D)-3D

-5=-4+2D-3D

D=1

$$\int (\frac{1}{x^2-3}+\frac{1}{x^2-2})dx$$

$$\int \frac{dx}{x^2-3} + \int \frac{dx}{x^2-2}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}} ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right| + C$$

b)) $\int \frac{dx}{x^7+4x^5+6x^3-4x}$

$$= \int \frac{dx}{x(x^6+4x^4+6x^2-4)}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$= \int \frac{\frac{dt}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{t}(t^3 + 4t^2 + 6t - 4)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t^3 + 4t^2 + 6t - 4)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-2)(t^2 + 2t + 2)}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t(t-2)(t^2 + 2t + 2)} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t-2} + \frac{(t+D)}{t^2 - 2t + z}\right) dt$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{t(t-2)(t^2 - 2t + 2)} = \frac{A(t-2)(t^2 - 2t + 2) + 8t(t^2 - 2t + 2) + (Cz + D) + (t+1)}{t(t-z)(t^2 - 2t + 2)}$$

$$\frac{1}{2} = A(t-2)(t^2 - 2t + 2) + B + (t^2 - 2t + 2) + (t + D) + (t - 2)$$

$$\frac{1}{2} = At^3 - 2At^2 + 2At - 2At^2 + 4AT - 4A + Bt^3 - 2Bt^2 + 2Bt + Ct^3 - 2Ct^2$$

$$\frac{1}{2} = (A + B + C)t^3 + (-2A - 2A - 2B - 2C + D)t^2 + (2A + 4A + 2B - 2D)t + (-4A)$$

$t^3|0 = A + B + C$

$t^2|0 = A + B + C$

$t^1|0 = A + B + C$

$t^0|\frac{1}{2} = -4A$

$A = -\frac{1}{8}$

0 = A + B + C

0 = - 4A -2B - 2C+ D

$\frac{1}{2} = -2B - 2C + D$

0 = 6A + 2B - 2C + D

0 = 3A + B – D

$0 - 3\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} - D$

$D = \frac{1}{2}$

$0 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + C$

$C = 0$

$$= -\frac{1}{8}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{8}\int \frac{dt}{t-2} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}$$

$$= -\frac{1}{8}ln|t| + \frac{1}{8}ln|t-2| + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t-1)^2 + 1}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$= -\frac{1}{8}ln|t| + \frac{1}{8}ln|t-2| + \frac{1}{2}arctg\frac{t-1}{t} + c.$$

$$= -\frac{1}{8}ln|x^2| + \frac{1}{8}ln|x^2-2| + \frac{1}{2}arctg(x^2-1)+c.$$

c) $\int \frac{dx}{x(x^2-8)}$

$$Separación\ en\ fracciones\ parciales$$

$$\frac{1}{x(x^2-8)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-8}$$

$$1 = Ax^2 - 8A + Bx^2 + Cx$$

$$1 = (A+B)x^2 + Cx - 8A$$

$$A + B = 0 \ \rightarrow B = -A \ \rightarrow B = \frac{1}{8}$$

$$C = 0$$

$$-8A = 1 \rightarrow A = -\frac{1}{8}$$

$$Reemplazando\ en\ la\ ecuación:$$

$$-\frac{1}{8x} + \frac{x}{8(x^2-8)}$$

$$\int -\frac{1}{8x} + \frac{x}{8(x^2-8)}\ dx$$

$$\int -\frac{1}{8x}\ dx + \int \frac{x}{8(x^2-8)}\ dx$$

$$= -\frac{1}{8}\ln x + \frac{1}{16}\ln x^2 - 8 + c$$

$$= \frac{1}{16}\ln\frac{x^2-8}{x^2} + c$$

4.2.21 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

a) $\int \frac{18}{9x^2-x^4}dx$

b) $\int \frac{dx}{a^2x^2-b^2}$

c) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

d) $\int \frac{3x+2}{x^3+3x^2+3x+1}$

e) $\int \frac{x^2+2x-1}{x^3+x^2-2x}$

4.3 INTEGRALES DEFINIDAS

ISBN: 978-631-6557-36-0

Para una función $\boldsymbol{f(x)}$ que es continua en un intervalo [a, b] y $\boldsymbol{F(x)}$ como integral indefinida de $\boldsymbol{f(x)}$ tenemos:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

4.3.1 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRALES DEFINIDAS

Ejercicio 1

$\int_{-2}^{3}(x^2 + 2)dx$	Integrar
$\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\Big\|_{-2}^{3}$	Evaluar los límites de integración
$9 + 6 - \left(-\frac{8}{3} - 4\right) =$	Resolver matemáticamente
$= \frac{65}{3}$	Solución

Ejercicio 2

$\int_0^7 \frac{4}{\sqrt{5x+1}}dx$	Cambio de variable $\int u\, du$ $u = 5x + 1$ $du = 5$
$\frac{8}{5}\int_0^7 \frac{5}{2\sqrt{5x+1}}dx$	Completamos la diferencial y sacamos los valores constantes
$\left(\frac{8}{5}\sqrt{5x+1}\right)\Big\|_{-2}^{3}$	Evaluar los limites
$\frac{8}{5}(6-1) = 8$	Solución

Ejercicio 3

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\int_{1}^{e} In(x^2)dx$$

Aplicamos las propiedades

$$\int_{0}^{\sqrt{3}} 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$Propiedad\ de\ logaritmos$

$$\int_{1}^{e} In(x^2)dx = \int_{1}^{e} 2In(x)dx$$

$$\int_{1}^{e} 2In(x)dx \qquad u = In(x)$$

$Ingracion\ por\ partes$

$$\int u * dv\, u * v - \int v * du$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \qquad v = x$$

$$2(xIn(x) - \int dx$$

Integramos y reemplazamos los valores originales

$$\int_{2}^{e} 2In(x)dx = 2(xIn(x) - x|_{1}^{e}$$

$$2(eIn(e) - e(1 * In(1) - 1) = 2$$

Solución

Ejercicio 4

$$\int_{0}^{\pi} e^{2x} 2x \cos x\, dx$$

$$u = e^{2x} \qquad dv = cosxdx$$

$$du = 2e^{2x}dx \qquad v = \sin x$$

Integración por partes

$$\int u * dv\, u * v - \int v * du$$

$$e^{2x}sinx - \int 2e^{2x}sinxdx$$

$$u = 2e^{2x} \qquad dv = sinxdx$$

$$du = 4e^{2x}dx \qquad v = -cosx$$

Aplicamos nuevamente integración por partes

$$\int u * dv\, u * v - \int v * du$$

$$\int e^{2x}cosxdx = e^{2x}sinx - (-2e^{2x}cosx + \int 4e^{2x}cosxdx)$$

Resolvemos la integral

$$5\int e^{2x}cosxdx = e^{2x}sinx + 2e^{2x}cosx$$

$$\int 2e^{2x}sinxdx = \frac{1}{5}(e^{2x}sinx + 2e^{2x}cosx)$$

$$\int_{0}^{\pi} e^{2x} 2x \cos x\, dx = \left[\frac{1}{5}(e^{2x}sinx + 2e^{2x}cosx)\right]_{1}^{e}$$

Evaluamos los limites

$$\frac{1}{5}[e^{2\pi}sin\pi + 2e^{2\pi}cos\pi) - (e^{0}sin0 + 2e^{0}cos0)]$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$=\frac{1}{5}(2-2e^{2\pi})$$

Solución

Ejercicio 5

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{1+cos^2x}dx=$$

$t=cos\,^2x \qquad dt=2cosx(-sinx)dx$

$\qquad -dt=2sinxcosxdx$

Cambio de variable

$$\int u\,du$$

$$\int\frac{sin2x}{1+cos^2x}dx=\int\frac{2sixcosx}{1+cos^2x}dx$$

$$\int\frac{-1}{1+t}dt=-Int=-\ln(1+cos^2x)$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{sin2x}{1+cos^2x}dx=[\ln(1+cos^2x)]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

Evaluamos los limites

$$-\ln\left[1+cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-[\ln(1+cos^20)]$$

$$-\ln 1+\ln 2=\ln 2$$

Solución

Ejercicio 6

$$\int_{0}^{1}arcsinxdx$$

$u=arcsinx \qquad dv=dx$

$du=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$v=\ x$

Integración por partes

$$\int u*dv\,u*v-\int v*du$$

$$xarcsinx-\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$$

$$=xarcsinx+\sqrt{1+x^2}$$

Aplicamos nuevamente integración por partes

$$\int u*dv\,u*v-\int v*du$$

$$\int_{0}^{1}arcsinxdx=\left(xarcsinx+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_{1}^{e}$$

$$=\frac{\pi}{2}-1$$

Solución

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejercicio 7

$$\int_0^1 \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$$

$$u = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) \qquad\qquad dv = dx$$

Integración por partes

$$\int u * dv\, u * v - \int v * du$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \times \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1\right)dx$$

$$du = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad\qquad v = x$$

$$x\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx =$$

Aplicamos nuevamente integración por partes

$$\int u * dv\, u * v - \int v * du$$

$$x\ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \sqrt{x^2+1}$$

$$\int_0^1 \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + \sqrt{x^2+1}\Big|_1^e$$

$$= \ln\left(\sqrt{2}-1\right) + \sqrt{2} - 1$$

Solución

Ejercicio 8

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{3}} 2x(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,dx =$$

Cambio de variable

$$\int u\, du\, u = 1 + x^2$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2} = \frac{1}{3}\,(1+x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$du = 2x$$

Completamos la integral

Solución

$$\frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejercicio 9

$$\int_0^1 xe^{-3x^2+1}\,dx$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 -6xe^{-3x^2+1}\,dx = -\frac{1}{6}e^{-3x^2+1}\Big|_0^1$$

Cambio de variable

$$\int u\,du$$

$$u = 3x^2 + 1$$

$$du = 6x$$

Completamos la integral

Solución

$$= -\frac{1}{6}(e^{-2} - e)$$

Ejercicio 10

$$\int_e^{e^2} \frac{3}{x(4+\ln x)}\,dx$$

Utilizar cambio de variable

$$\int t\,dt$$

$t = \ln x$ $\quad\quad dt = \frac{1}{x}dx$

$x = e$ $\quad\quad t = \ln e = 1$

$x = e^2$ $\quad\quad t = \ln e^2 = 2$

$$\int_e^{e^2} \frac{3}{x(4+\ln x)}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{3}{(4+\ln x)} \times \frac{1}{x}\,dx$$

Completamos la diferencial

$$\int_1^2 \frac{3}{(4+t)}dt = 3(\ln(4+t))\Big|_1^2$$

$$= 3(\ln 6 - \ln 5) = 3\ln\frac{6}{5}$$

Solución

4.3.2 EJERCICIOS PROPUESTOS DE INTEGRALES DEFINIDAS

$\boldsymbol{a)}\ \displaystyle\int_0^2 (x^2 + 2x)dx$

$\boldsymbol{b)}\ \displaystyle\int_{-2}^2 (x + 5)dx$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$c)\int_0^4 (\sqrt{x}+3x)dx$$

$$d)\int_{-1}^2 (x^2-4x+3)dx$$

$$e)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} sin\, x\, cos\, x\, dx$$

$$f)\int_e^{e^2} \frac{cos(lnx)dx}{x}$$

$$g)\int_3^5 \frac{7x-11}{x^2-3x+2}\, dx$$

$$h)\int_0^{\frac{\pi}{6}} tg^3(2x)\, dx$$

$$i)\int_2^6 \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$j)\int_{-1}^2 \frac{xdx}{x^2+4}$$

$$k)\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \sqrt{1+cosx}\, dx$$

$$l)\int_0^{3/2} \frac{dx}{x^2-4}$$

$$m)\int_0^{\pi} 3senx\, dx$$

$$n)\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

4.4 EJERCICIOS RESUELTOS DE INTEGRALES IMPROPIAS CON LIMITE INFINITO

Ejercicio 1

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} =$$

Aplicamos limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} arctg\ x\Big|_0^b$$
$$\lim_{b\to\infty}(arctg\ b - arctg\ 0) = arctg\ (\infty) - arctg\ 0$$
$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\ , Es\ convergente$$

Resolvemos la integral
$$\lim_{b\to\infty} F(x)|_a^b$$
Evaluar la integral
$$\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$
Solución

Ejercicio 2

$$\int_{-\infty}^{1} \boldsymbol{e^x dx}$$

$$\int_{-\infty}^{1} e^x dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 e^x dx =$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_a^1 e^x dx = \lim_{a\to\infty} e^x\Big|_a^1$$
$$\lim_{a\to-\infty}(e - e^a) = e - e^{-\infty} = e - 0 = e$$
$$\int_{-\infty}^{1} e^x dx = e\ \ Es\ convergente$$

Aplicamos limite
$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$
Resolvemos la integral
$$\lim_{b\to\infty} F(x)|_a^b$$
Evaluar la integral
$$\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$
Solución

Ejercicio 3

$$\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{|x|e^{-x^2} dx}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{0} |x|e^{-x^2} dx + \int_{0}^{\infty} |x|e^{-x^2} dx$$
$$\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx$$
$$\int_{-\infty}^{0} -xe^{-x^2} dx + \int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2} dx =$$

Resolver el valor absoluto

Aplicamos limite
$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{a\to\infty} \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_a^0 + \lim_{b\to\infty}\frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^b$$
$$\frac{1}{2}\left[\lim_{a\to-\infty}\left(1 - e^{-a^2}\right)\lim_{b\to\infty}\left(e^{-b^2} - 1\right)\right]$$

Resolvemos la integral
$$\lim_{b\to\infty} F(x)|_a^b$$
Evaluar la integral
$$\lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{1}{2}[(1-0)-(0-1)]=1$$

Resolvemos matemáticamente

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x|e^{-x^2}dx=1\ \ Es\ convergente.$$

Solución

Ejercicio 4

$$\int_{0}^{+\infty}\boldsymbol{e^{-ax}\ cos(bx), a>0}$$

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\ cos(bx)dx$$

Aplicamos limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b}f(x)dx$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}e^{-ax}\ cos(bx)dx$$

$$\int e^{-ax}\,cos(bx)dx$$

Resolvemos la integral

$$\lim_{b\to\infty}F(x)|_a^b$$

$$\lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b}e^{-ax}\ cos(bx)dx$$

$$\int e^{-ax}\ cos(bx)dx\ por\ partes$$

$$\lim_{b\to\infty}\left.\frac{e^{-ax}(b\ sen\ bx-a\cos bx)}{a^2+\ b^2}\right|_0^b$$

Evaluar la integral

$$\lim_{b\to\infty}F(b)-F(a)$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left[e^{-a\theta}.\frac{(b\ sen\ b\theta-a\cos b\theta)}{a^2+\ b^2}+\frac{a}{a^2+\ b^2}\right]$$

$$0+\frac{a}{a^2+\ b^2}=\frac{a}{a^2+\ b^2}$$

Solución

$$\int_{0}^{+\infty}e^{-ax}\ cos(bx)dx=\frac{a}{a^2+\ b^2}$$

$Es\ convergente.$

Ejercicio 5

$$\int_{0}^{1}\boldsymbol{\frac{dx}{\sqrt{1-x}}}$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\lim_{E\to 0}\int_0^{1-E}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

Aplicamos limite

$$\lim_{b\to 0}\int_a^b f(x)dx$$

$$\lim_{E\to 0}\int_0^{1-E}\frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{E\to 0} -2\sqrt{1-x}\Big|_0^{1-E}$$

Resolvemos la integral

$$\lim_{b\to 0} F(x)|_a^b$$

$$-2\lim_{E\to 0}(\sqrt{E}-1) = -2(0-1) = 2$$

Evaluar la integral

$$\lim_{b\to 0} F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = 2\,, Es\ convergente.$$

Solución

Ejercicio 6

$$\int_1^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$\lim_{E\to 0}\int_{1+E}^2\frac{x^3dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{E\to 0} -2\sqrt{1-x}\left[\left[\frac{(x+1)^3}{7} + 3(x+1)^{3/2} + x\right]\right|_{1+E}^0$$

Aplicamos limite

$$\lim_{a\to 0}\int_a^b f(x)dx$$

Resolvemos la integral

$$\lim_{a\to 0} F(x)|_a^b$$

$$\lim_{E\to 0}\left[\frac{72}{7} - \sqrt{E}\left(\frac{E}{7} + 3E^{3/2} + 17E\right)\right] = \frac{72}{7}$$

Evaluar la integral

$$\lim_{b\to 0} F(b) - F(a)$$

$$\int_1^2 \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{72}{7}\,, Es\ convergente$$

Solución

Ejercicio 7

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx + \int_{0}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx$$

Separamos la integral y definimos nuevos limites

$$\lim_{e\to 0} \int_{-1}^{0-E} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx + \lim_{e\to 0} \int_{0-E}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx =$$

Aplicamos limite

$$\lim_{b\to 0} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

$$\lim_{E\to 0} 3\left[\frac{3}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right) - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right]\Bigg|_{-1}^{-E} +$$

$$\lim_{E\to 0} 3\left[\frac{3}{2}\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x^2}-4\right) - \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}\right]\Bigg|_{E}^{1} =$$

Resolvemos la integral

$$\lim_{a\to 0} F(x)|_a^b$$

Evaluar la integral

$$\lim_{b\to 0} F(b) - F(a)$$

$$3\left(\frac{3}{2}[\ln 2(0-4) - 0] - \frac{3}{2}\left[\ln(1-4) - \frac{1}{4}(1-4)\right]\right)$$
$$+ 3\left(\frac{3}{2}\left[\ln 3(1-4) - \frac{1}{4}(1-4)\right]\right.$$
$$\left. - \frac{3}{2}\left[ln2(0-4) - \frac{1}{4}(0-0)\right]\right) = -\frac{27}{2}\ln 3$$

Solución

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln\left(2+\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}dx = -\frac{27}{2}\ln 3 \text{ , } Es\ convergente$$

4.5 EJERCICIOS PROPUESTOS DE LA INTEGRAL IMPROPIA

a) $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+x^2}$

b) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\ sen\ x^2 dx$

c) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x}}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.6 APLICACIONES DE LA INTEGRAL IMPROPIA

Las integrales impropias extienden el concepto de integral definida para calcular medidas de regiones, sólidos, longitudes y otros parámetros matemáticos o físicos no acotados, algunos usos y aplicaciones de este tipo de integrales son:

- Cálculo de áreas de regiones no acotadas: Por ejemplo, calcular el área bajo una curva decayente desde un punto x=a hasta el infinito.
- Cálculo de volúmenes de sólidos no acotados: Como el volumen de un cono o paraboloide que se extiende hasta el infinito.
- Longitudes de curvas no acotadas: Hallar la longitud de curvas que se aproximan asintóticamente a un eje, pero nunca lo interceptan.
- Algunas integrales impropias surgen al evaluar límites que involucran integrales definidas.
- En estadística, para hallar momentos de distribuciones no acotadas como la normal o exponencial.
- En física, para calcular trabajo hecho por fuerzas dependientes de la posición.
- En teoría de probabilidad, para calcular media, varianza y otras cantidades de variables aleatorias.
- Para estimar valores numéricos de constantes matemáticas como π o e (Fleming, & Varberg, 1992).

4.7 EJERCICIOS RESUELTOS DE APLICACIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS

a) Hallar el área de la figura comprendida entre la curva de la función $y = \frac{a^3}{x^2+x^2}$, y el eje de abscisas.

$$A(R) = 2\int_0^{-\infty} y dx = 2\int_0^{-\infty} \frac{a^3}{x^2+a^2} dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$A(R) = \lim_{b \to x} \int_a^b \frac{dx}{x^2 + a^2} dx$$
$$= 2\, a^3 \lim_{b \to x} arctg \frac{x}{a}) \Big|_0^b$$
$$A(R) = \; 2a^3 \; \lim_{b \to x} \left(arctg \frac{b}{a} - arctg 0 \right)$$
$$A(R) = 2a^3 \; arctg(\infty)$$
$$A(R) = \; a^3 \pi$$

Aplicamos limite
$$\lim_{b \to x} \int_a^b f(x)dx$$
Resolvemos la integral
$$\lim_{a \to 0} F(x)|_a^b$$
Evaluar la integral
$$\lim_{b \to 0} F(b) - F(a)$$
Solución

b) Calcular el área de la región limitada por las curvas:

$$\boldsymbol{y = \frac{2|x|}{1 + x^4}; \; y = \frac{4|x|}{1 + x^4}}$$

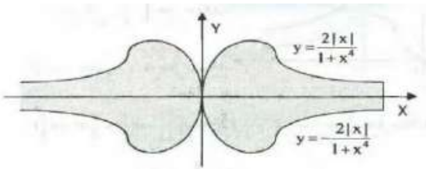


Figura. 4.2 Grafica de la función del ejercicio B

$$A(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\frac{2|X|}{1 + x^4}) - (\frac{-4|x|}{1 + \; x^4})]dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{6|X|}{1 + x^4} dx$$

$$A(R) = \int_{-\infty}^{0} \frac{6|X|}{1 + x^4} dx \; + \int_{0}^{+\infty} \frac{6|X|}{1 + x^4} dx \; = 3 \int_{-\infty}^{0} \frac{2|X|}{1 + x^4} \; dx \; + \; 3 \; \int_{0}^{+\infty} \frac{2|X|}{1 + x^4} \; dx$$

$$A(R) = \lim_{a \to \infty} -3 \int_a^0 \frac{2x \;\; dx}{1 + \; (x^2)^2} dx + \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{2x \;\; dx}{1 + \; (x^2)^2} dx$$

$$A(R) = \lim_{a \to \infty} \int_a^0 \frac{2x \;\; dx}{1 + \; (x^2)^2} dx + 3 \lim_{b \to \infty} \int_0^b \frac{2x \;\; dx}{1 + \; (x^2)^2} dx$$

$$A(R) = \lim_{a \to \infty} arctg x^2 |_a^0 + \lim_{b \to \infty} arctg x^2 |_0^b$$

Aplicamos limite
$$\lim_{a \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$
Resolvemos la integral
$$\lim_{a \to \infty} F(x)|_a^b$$
Evaluar la integral
$$\lim_{a \to 0} F(b) - F(a)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$A(R) = -3 \lim_{a\to-\infty} (0 - arctga^2) + 3 \lim_{b\to+\infty} (arctgh^2 - 0)$$ Solución

$$A(R) = -3\big(-arctg(\infty)\big) + 3arctg(\infty)$$

$$A(R) = \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2} = 3\pi \;\; u^2$$

c) Hallar el área de la región comprendida entre las curvas a la derecha de la recta x=1:

$\boldsymbol{xy = 1} \qquad \boldsymbol{y = \frac{x}{x^2+1}}$

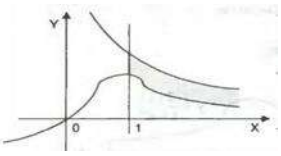


Figura. 4.3 Grafica de la función del ejercicio

$$A(R) = \int_1^{-\infty} (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx$$

$$A\,(R) = \lim_{b\to-\infty} \int_1^b (\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1})dx$$

Aplicamos limite

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$A(R) = \lim_{b\to\infty} In\, x - \frac{1}{2}\, In\,(x^2+1))\Big|_1^b$$

Resolvemos la integral

$$\lim_{b\to\infty} F(x)|_a^b$$

$$A(R) = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\, In(\frac{x^2}{x^2+1}\Big|_1^b$$

$$A(R) = \frac{1}{2} \lim_{b\to+\infty} (In\, \frac{b^2}{b^2+1} - \;In\, \frac{1}{2})$$

Evaluar la integral

$$\lim_{b\to 0} F(b) - F(a)$$

$$A(R) = \left(\frac{1}{2}\, In\; 2\right) u^2$$

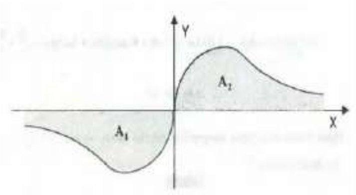
Solución

d) Calcular el área de la región R comprendida entre la curva $\boldsymbol{y = xe^{-x^2/2}}$ y su asíntota

- **Calculando la asíntota $\boldsymbol{y = xe^{-x^2/2} = \frac{x}{e^{x^2/2}}}$, $\boldsymbol{cuando\; x \to \infty,\;\; y = 0}$**

ISBN: 978-631-6557-36-0

- **Luego y = 0 es la única asíntota. Ahora graficando la curva se tiene**



Se observa que la gráfica es simétrica con respecto al origen.

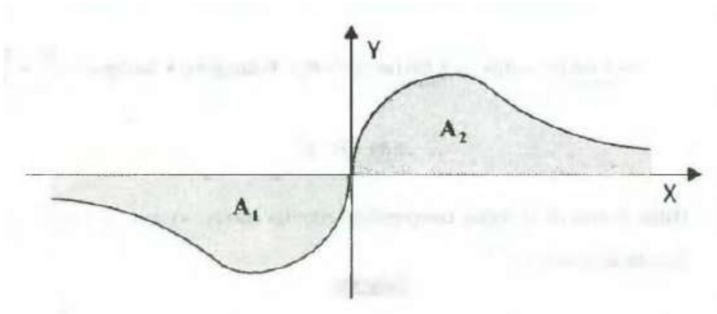


Figura. 4.4 Grafica de la función del ejercicio D

$$A(R) = A_1 + A_2 = 2A_2$$

$$A(R) = \int_0^b y\,dx = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{x^2/2}\,dx$$

$$A(R) = 2\lim_{b\to\infty} -e^{x^2/2}\Big|_0^b$$

$$A(R) = \lim_{b\to\infty}\left(e^{b^2/2} - 1\right) = -2(0-1) = 2$$

$$A(R) = 2u^2$$

Aplicamos limite

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Resolvemos la integral

$$\lim_{b\to\infty} F(x)|_a^b$$

Evaluar la integral

$$\lim_{b\to 0} F(b) - F(a)$$

Solución

EJERCICIOS RESUELTOS DE APLICACIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS

4.8 EJERCICIOS PROPUESTOS DE APLICACIÓN DE INTEGRALES IMPROPIAS

a) Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la cuerva $\boldsymbol{x + xy^2 - y = 0}$ alrededor de su asíntota vertical

b) Hallar el volumen del cuerpo que se engendra al girar la cisoide alrededor de su asíntota x = 2 a

ISBN: 978-631-6557-36-0

c) Determinar el volumen de revolución engendrado al girar la curva $\boldsymbol{y = \frac{3x}{x^2+3}}$ alrededor del eje X.

d) Hallar el volumen del cuerpo engendrado al girar la superficie limitada por las líneas $\boldsymbol{y = e^x}$, x = 0 e y = 0 alrededor del eje X.

e) Calcular el volumen del sólido generado por la rotación de la curva $\boldsymbol{xy^2 = 9a^2(3a - x). a > 0}$ alrededor de su asíntota vertical.

4.9 APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida es una potente herramienta para calcular cantidades acumuladas de distintas magnitudes físicas y geométricas, algunos usos y aplicaciones importantes de la integral definida son:

- Cálculo de áreas bajo curvas: Es la aplicación más directa, hallar el área limitada por una curva y el eje X en un intervalo $[a, b]$.
- Cálculo de volúmenes de sólidos de revolución: Al rotar una curva en 2D alrededor de un eje, la integral definida permite calcular el volumen del sólido resultante.
- Longitud de arco de curvas: Integrando la raíz cuadrada de $1 + [f'(x)]2$ entre dos puntos se obtiene la longitud de arco de la curva $f(x)$.
- Trabajo mecánico de una fuerza: Si $F(x)$ es la fuerza aplicada al mover un objeto una distancia x, $\int_a^b F(x) \quad dx$ es el trabajo realizado.
- Masa y centroide de una lámina: La integral doble permite calcular la masa y el centro de masa de una lámina 2D con densidad no uniforme.
- Momento y centro de masa de sólidos 3D: Similar al caso anterior, usando integrales triples.
- Carga eléctrica de una distribución de carga a lo largo de una curva.
- En estadística, para calcular probabilidades de variables aleatorias continuas.
- En física, para calcular energía, momento lineal, momento angular, entre otras magnitudes (Fleming, & Varberg, 1992) .

ISBN: 978-631-6557-36-0

4.10 AREA DE LA REGIÒN PLANA

El área de una región plana es una cantidad fundamental que surge en múltiples aplicaciones del cálculo integral, la geometría y el análisis matemático, el área de una región plana es una magnitud que representa la medida de la extensión de una porción de plano contenida dentro de una frontera. En regiones simples como rectángulos o triángulos el área viene dada por fórmulas geométricas, en cambio, en regiones más complejas se requiere integrales (Granville, 2003).

El área bajo una curva en un intervalo $[a, b]$ se calcula con la integral definida $\int_a^b f(x)\ \ dx$. Esto genera el área de una región limitada por la curva $f(x)$ y el eje x, para regiones limitadas por dos curvas se pueden usar integrales dobles sobre sus bordes.

Las aplicaciones del cálculo de áreas de regiones planas incluyen calcular áreas de terrenos irregulares, superficies de lagos, áreas encerradas por vías, también es útil para calcular probabilidades de variables aleatorias continuas en estadística, y parámetros físicos como trabajo, energía, carga eléctrica, flujo magnético y en geometría, el área interviene en el cálculo de longitudes, volúmenes, centroides y momentos de inercia.

4.11 EJERCICIOS RESUELTOS DEL AREA DE LA REGION PLANA

a) Hallar el área de la región plana limitada por la curva $y = sin2x$ y el eje OX en el intervalo $0, \boldsymbol{\pi}$

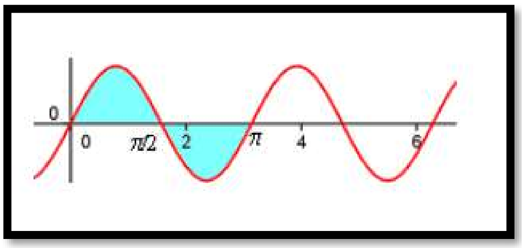


Figura. 4.5 Grafica de la función del ejercicio A

$y = sin2x$
eje OX$= 0$
$x = \frac{\pi}{2}$
$x = \pi$

La función $y = sin2x$ es periódica en π
Corta con el eje OX en los puntos x

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2x\ dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - fF(b)$$

$$S = 2\left(-\frac{1}{2}cos2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Integrar por cambio de variable

$u = 2x \qquad du = 2$

$$\int \sin(u)\ du$$
$$= -\cos(u)$$

$S = 2u^2$

Solución

b) Hallar el área de la región plana limitada por la curva $y = (sinx^2)cosx$ y el eje OX en el intervalo $\left[0, \frac{1}{\pi}\right]$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (sinx^2)cosxdx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - fF(b)$$

$$S = \frac{1}{3}(\sin x^3)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

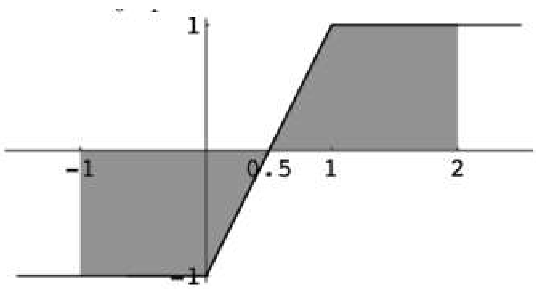
Solución

$$\frac{1}{3}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right)$$
$$S = \frac{1}{3}u^2$$

c) Calcular el área de la región limitada por la grafica $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-1,2]$

El ´área de la región (que es la parte sombreada de la figura) viene dada por la fórmula

$$A = \int_{-1}^{2} \big||x| - |x-1|\big| dx$$



ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 4.6 Grafica de la función del ejercicio C

Teniendo en cuenta el signo de la función, la integral se descompone así:

$$A = \int_{-1}^{0} 1dx + \int_{0}^{0.5} -(2x-1)dx + \int_{0.5}^{1} (2x-1)dx + \int_{1}^{2} 1dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_{b}^{a} fxdx = F(a) - fF(b)$$

$$\int_{-1}^{0} 1dx = x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{0}^{0.5} 1dx = -(x^2 - x) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{0.5}^{1} 1dx = (x^2 - x) \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int_{1}^{2} 1dx = x \Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

Solución

$$A = \frac{5}{2} u^2$$

d) Calcular el área de la región limitada por la grafica $f(x) = x\,(\ln x)^2$ en el intervalo $[1, e]$

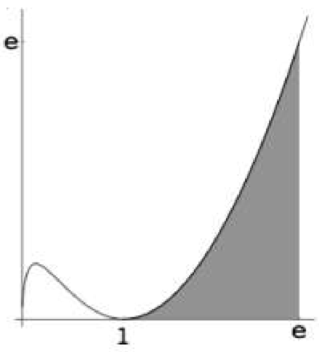


Figura. 4.7 Grafica de la función del ejercicio D

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$A = \int_{1}^{e} x\,(\ln x)^2$$

Formula de planteamiento

$$\int_{b}^{a} fxdx = F(a) - fF(b)$$

$$A = (\frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4})\Big|_{1}^{e}$$

$$A = \frac{e^2 - 1}{4}u^2$$

Solución

e) Calcular el área de la región limitada por la grafica $f(x) = x\,(\ln x)^2$ en el intervalo $[1, e]$

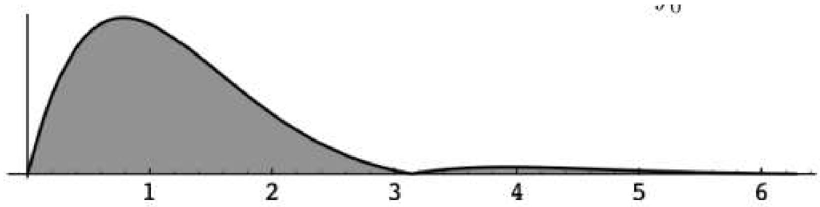


Figura. 4.8 Grafica de la función del ejercicio E

$$A = \int_{0}^{2\pi} e^{-x}|senx|\,dx$$

$$A = \int_{0}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx + \int_{\pi}^{2\pi} -e^{-x}\sin x\,dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_{b}^{a} fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = \left[-\frac{e^{-x}}{2}(sinx + cosx)\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$+ [\frac{e^{-x}}{2}(sinx + cosx]\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \frac{(e^{-x} + 1)^2}{2}u^2$$

Solución

f) Hallar el área de la región limitada por la función:

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\;\; y\; el\; eje\; OX$$

Como la curva corta al eje OX en los puntos de abscisa x = 0, x = 1 y x = 2, el ´área viene dada por

ISBN: 978-631-6557-36-0

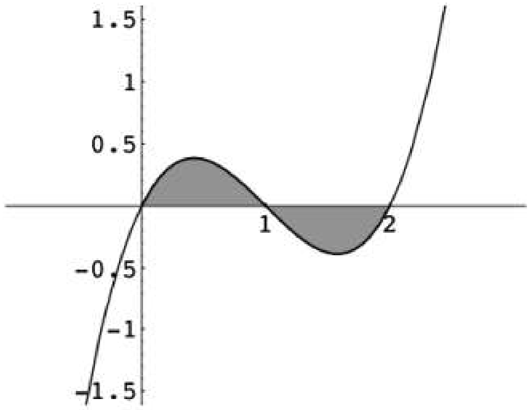


Figura. 4.9 Grafica de la función del ejercicio F

Ahora bien, en el intervalo [0, 1] la curva queda por encima del eje X mientras que en el intervalo [1, 2] queda por debajo del mismo.

$$A = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 -f(x)dx \qquad \int_b^a fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = \int_0^1 (x^3 -3x^2 + 2x)dx$$
$$- \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$
$$A = (x^4 - x^3 + x^2)|_0^1 - (x^4 - x^3 + x^2)|_1^2$$

Solución

$$A = \frac{1}{2}u^2$$

g) Calcular el área de la región limitada por $y = \frac{4}{x}$ y el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 4$

ISBN: 978-631-6557-36-0

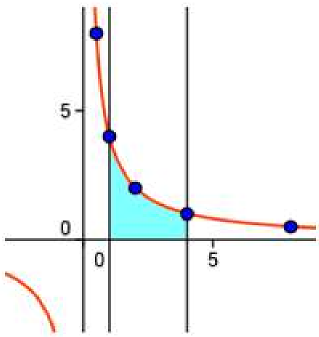


Figura. 4.10 Grafica de la función del ejercicio G

La función $y = \frac{4}{x}$ que es una hipérbola equilátera, puede trazarse dando algunos puntos: (0,5, 8); (1,4); (2, 2); (4, 1); (8, 0,5).

$$A = \int_{1}^{4} \frac{4}{x} dx \qquad \int_{b}^{a} fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = [4 \ln x]|_1^4$$ Solución
$$A = 4[\ln 4 - \ln 1]$$
$$A = 4 \ln 4\, u^2$$

h) Hallar la superficie del recinto plano encerrado entre la curva dada por la función $f(x) = xe^x$ y el eje OX, en el intervalo $[-2,0]$

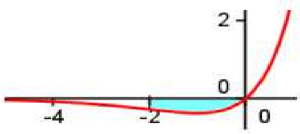


Figura. 4.11 Grafica de la función del ejercicio H

En el intervalo considerado, el signo de la función es negativo, por tanto, la superficie buscada viene dada por:

$$S = -\int_{-2}^{0} xe^x\, dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$S = -\int_{-2}^{0} xe^{x}\,dx$$

$$\int_{b}^{a} fxdx = F(a) - F(b)$$

$$\int xe^{x}\,dx$$

Utilizamos método por partes

$$u * v - \int v\,du$$

$u = x \qquad dv = xe^{x}$

$du = dx \qquad v = e^{x}$

$$xe^{x} - \int e^{x}dx = xe^{x} - e^{x}$$

Evaluamos los límites de integración

$$\int_{-2}^{0} xe^{x}\,dx = [xe^{x} - e^{x}]\Big|_{-2}^{0}$$

$$A = 1 - 3e^{-2}\,u^{2}$$

i) Calcula el área encerrada entre la curva de la función $f(x) = \frac{x^2}{2+x}$ y el eje OX, en el intervalo [0,2]

$$A = \int_{0}^{2} \frac{x^2}{2+x}dx$$

$$\int_{b}^{a} fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = \int_{0}^{2} (x - 2 + \frac{4}{2+x})\,dx$$

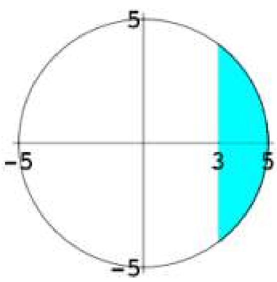
$$A = [\frac{x^2}{2} - 2x + 4\ln(2+x)]\Big|_{0}^{2}$$

$$A = -2 + 4\ln 4 - 4\ln 2$$

Solución

$$A = 4\ln 2 - 2\,u^{2}$$

j) Hallar el ´área del menor de los sectores que la recta $x = 3$, determina en la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$



ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 4.12 Grafica de la función del ejercicio J

$$A = 2\int_3^5 \sqrt{25-x^2}dx$$

$$\int_b^a fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = 2[\frac{x}{2}\sqrt{25-x^2} + \frac{25}{2}arc\ \sin\frac{x}{5}\Big|_3^5$$

Evaluamos los límites de integración

$$A = \left[\frac{25\pi}{2} - 12 - 25arc\sin\frac{3}{5}\right]u^2$$

4.12 EJERCICIOS PROPUESTOS DE ÁREA DE UNA REGIÓN PLANA

Calcular el área de la región plana

a) $\boldsymbol{y = \frac{3x-4}{x^2-x-6}; x = 4; x = 6}$

b) $\boldsymbol{b)\ x = \frac{3y-5}{y^2-2y-3}, y = 4, y = 6}$

c) $\boldsymbol{c)\ \ y = x^2cosx, x = -\frac{\pi}{2}, x = 0}$

d) $\boldsymbol{d)y = 3sen(2x); x = 1; x = 4}$

e) $\boldsymbol{e)\ \ x = \frac{2y}{\sqrt{9-y^2}}, y = 0, y = 2}$

f) $\boldsymbol{f)\ \ y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}, x = 0, x = 1}$

g) $\boldsymbol{g)\ x = lny; y = 1; y = 4}$

h) $\boldsymbol{h)\ y = \frac{x^2-1}{x^2+2}, x = 0, x = 4}$

i) $\boldsymbol{i)\ f(x) = \frac{2}{x+1}; x = 0; x = 3}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

j) $\boldsymbol{j)\ x = y - 1,\ \ y = 1\ ; y = 5}$

4.13 ÁREA BAJO UNA CURVA

El área bajo la curva es una noción fundamental que permite determinar cantidades acumuladas asociadas a una variación continúa representada por la función $f(x)$, el área bajo la curva de una función $f(x)$ entre dos puntos x $=\ a$ y $x\ =\ b$ representa el área de la región plana delimitada por la gráfica de $f(x),$ el eje X, y las rectas verticales $x\ =\ a$ y $x\ =\ b.$

En análisis matemático, esta área se calcula mediante la integral definida de f(x) entre los límites $a\ y\ b$:

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

El Teorema Fundamental del Cálculo relaciona esta integral definida con la derivada de la función primitiva $F(x)$.

Las aplicaciones del cálculo de áreas bajo curvas son muy amplias: longitud de arco de curvas, volumen de sólidos de revolución, trabajo de una fuerza variable, probabilidades de variables aleatorias continuas, energía bajo curvas de potencial, también es útil para resolver ecuaciones diferenciales, graficar curvas paramétricas, encontrar puntos de inflexión y asíntotas, realizar aproximaciones mediante sumas de Riemann, y demás conceptos del análisis matemático (Ayres, 2002).

4.14 EJERCICIOS RESUELTOS DEL AREA BAJO LA CURVA

a) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x) = 2x + 1}$, desde $\boldsymbol{x = 1, hasta\ x = 4}$

$$\boldsymbol{\int_1^4 2x + 1\, dx = \frac{2x^2}{x} + x}$$

$$\boldsymbol{\left(\frac{2(4)^2}{(4)} + 4\right) - \left(\frac{2(1)^2}{1} + 1\right) = 9}u^2$$

b) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x) = x^2}$ desde $\boldsymbol{x = 0, hasta\ x = 3}$

$$\int_0^3 x^2\, dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$\frac{x^3}{3}\begin{matrix}3\\0\end{matrix}=\left(\frac{3^3}{3}\right)-\left(\frac{0^3}{3}\right)=9u^2$$

c) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x)=x^3; desde\ x=2; hasta\ x=5}$

$$\int_2^5 x^3\,dx$$

$$\frac{x^4}{4}\int_2^5=\frac{609}{4}=152.25$$

d) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x+3}, desde\ x=-3, hasta\ x=1}$

$$\int_{-3}^{1}\sqrt{x+3}\,dx$$

$$\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}=\left(\frac{2(1+3)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(\frac{2(-3+3)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)=\frac{16}{3}u^2$$

4.15 EJERCICIOS PROPUESTOS DE ÁREA BAJO LA CURVA

a) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x-2}, desde\ x=2, hasta\ x=11}$

b) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x)=senx; desde\ x=0; hasta\ x=\frac{\pi}{2}}$

c) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x)=\sqrt{x}; desde\ x=1; hasta\ x=4}$

d) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{x=\frac{1}{6}(5-4y-y^2), desde\ y=0; hasta\ y=1}$

e) Calcular el área bajo la curva de $\boldsymbol{f(x)=x^2-2x+1,\ desde\ x=-1\ ; hasta\ x=3}$

4.16 ÁREA ENTRE CURVAS

ISBN: 978-631-6557-36-0

El área entre curvas se refiere a la región del plano delimitada por dos curvas distintas, por ejemplo, el área entre la curva $f(x)$ y la curva $g(x)$ en un intervalo $[a, b]$.
Para calcular esta área se pueden usar integrales dobles, integrando la diferencia de las funciones sobre el intervalo:

$$A = \int ab\,[f(x) - g(x)]\,dx$$

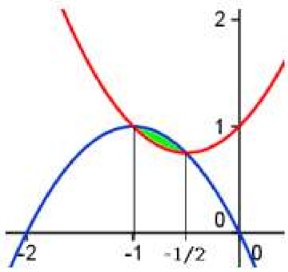
Otra forma es usar el Teorema de Green y convertirlo a una integral sencilla de borde.
Las aplicaciones del área entre curvas incluyen:

- Calcular áreas irregulares limitadas por dos bordes curvos.
- Hallar volúmenes de revolución de anillos sólidos.
- Encontrar probabilidades conjuntas en estadística.
- Calcular trabajo neto de una fuerza variable.

Es una noción fundamental del cálculo integral que permite determinar medidas de regiones planas limitadas por fronteras curvilíneas, con usos en geometría, análisis matemático, estadística, física y sirve para obtener soluciones a algunas ecuaciones diferenciales (Simmons, 1998).

4.17 EJERCICIOS RESUELTOS DE AREA ENTRE CURVAS

a) Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2 + x + 1$ e $y = -x^2 - 2x$



ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 4.22 Grafica de la función del ejercicio A

Las curvas se cortan en $x = 1$ y en $x = -\frac{1}{2}$ que son las soluciones de la ecuación $x^2 + x + 1 = -x^2 - 2x \qquad 2x^2 + 3x + 1 = 0$

$$S = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} (-x^2 - 2x - (x^2 + x + 1))dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - F(b)$$

$$\int_{-1}^{\frac{-1}{2}} (-2x^2 - 3x - 1)dx$$

Integramos

$$A = \left(-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - x\right)\Big|_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$A = \frac{1}{24}u^2$$

Evaluamos los limites

b) Calcula el área comprendida entre las parábolas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$

Los puntos de corte se obtienen resolviendo la ecuación $x^2 = \sqrt{x}$, sus soluciones son: $x = 0 \;\; x = 1$

La curva que va por encima es $y = \sqrt{x}$

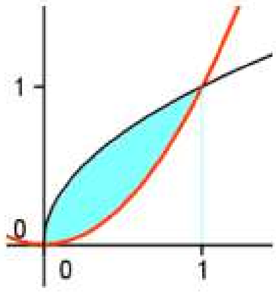


Figura. 4.23 Grafica de la función del ejercicio B

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - F(b)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$A = \left(\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

Integramos y evaluamos en los límites de integración

$$A = \frac{1}{3}u^2$$

Solución

c) Calcula el valor de a para el que las tangentes a la curva $y = x^2 + a$ en los puntos de abscisa de valor absoluto1, pasan por el origen de coordenadas. Hallar el área del recinto limitado por las curvas y las 2 tangentes.

La tangente de a $f'(x) = 2x$ se tiene:

- $x = 1 \quad y - (1 - a) = 2(x + 1)$
  $y = 2x - 1 + a$
  Debe pasar por el origen $(0{,}0) \quad 0 = -1 + a \quad a = 1$
- $x = -1 \quad y - (1 + a) = -2(x + 1)$
  $y = -2x - 1 + a$
  $P(0{,}0) \quad 0 = -1 + a \quad a = 1$

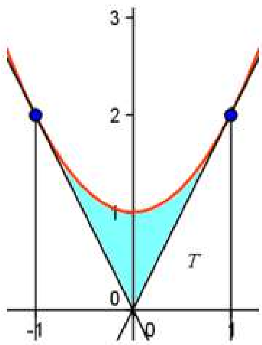


Figura. 4.24 Grafica de la función del ejercicio C

$$A = 2\left[\int_0^1 (x^2 + 1)\,dx - A_T\right]$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = 2\left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Bigg|_0^1$$

Evaluamos los límites de integración

$$A = 2\left(\frac{1 * 2}{2}\right)$$

Solución

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$A = \frac{2}{3}u^2$$

d) Calcula el área encerrada entre las curvas dadas por las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

Para determinar el área interesa conocer los puntos de corte de las curvas y saber qué curva va por encima de la otra entre esos puntos de corte. También es conveniente hacer un esquema gráfico de la situación.

Puntos de corte:

$f(x) = g(x)$ $\qquad\qquad x^2 = x^3 - 2x^2 + 2x$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x^2 - 3x + 2) = 0$$

$$x(x + 1)(x - 2) = 0$$

Las curvas se intersecan cuando $x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2$

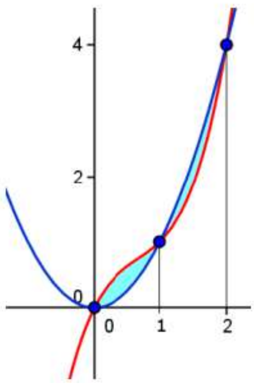
Los intervalos son: [0,1] [1,2]

$$\text{Si } 0 < x < 1, g(x) - f(x) = x(x-1)x - 2) = (+)\cdot(-)\cdot(-) > 0$$

$$g(x) \text{ va por encima de } f(x)$$

$$\text{Si } 1 < x < 2, g(x) - f(x) = x(x-1)x - 2) = (+)\cdot(+)\cdot(-) < 0$$

$$g(x) \text{ va por debajo de } f(x)$$



ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 4.25 Grafica de la función del ejercicio D

$$A = \int_0^1 \left(g(x) - f(x)\right)dx + \int_1^2 \left(f(x) - g(x)\right)dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - F(b)$$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x\ )dx$$
$$+ \int_1^2 -(x^3 - 3x^2 + 2x\ )dx$$

Integramos y evaluamos los límites de integración

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - -x^2\right)\Big|_1^2$$

$$A = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

Solución

$$A = \frac{1}{2}u^2$$

e) Calcula el área de la región acotada del plano limitada por la curva $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ y la recta $y = x$.

$y = x^3 - 3x^2 + 3x \qquad y = x$

$x^3 - 3x^2 + 3x = x$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

Se cortan cuando $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$,

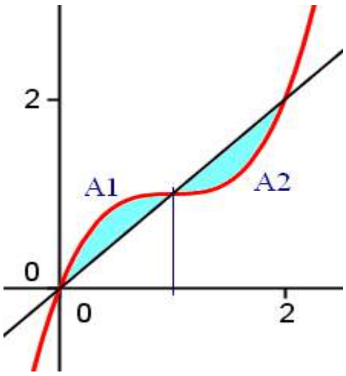


Figura. 4.26 Grafica de la función del ejercicio E

$$A = A1 + A2$$

$$A = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$$
$$+ \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 + 2x)dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - fF(b)$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Integramos

$$A = \left(\frac{x^4}{4} - x^3 - x^2\right)\Big|_0^1 + \left(-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2\right)\Big|_1^2$$

Evaluamos los límites de integración

$$A = \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 - 1^2\right) + \left(-4 + 8 - 4 + \frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right)$$

Solución

$$A = \frac{1}{2}u^2$$

f) Halla el área del recinto limitado por las curvas de ecuación $y = x^2$ e $y = |x|$

Solución:

$x^2 = |x|$

$x = 0 \quad x = -1 \quad x = 1$

Puntos

$(-1; 1)$; (0;0); (1;1)

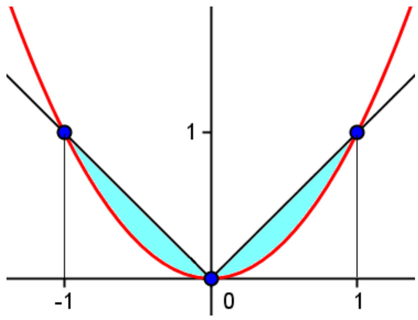


Figura. 4.27 Grafica de la función del ejercicio F

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - fF(b)$$

$$S = 2\int_0^1 (x - x^2)dx$$

Integración y evaluación de los límites de integración

$$S = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

Solución

$$S = \frac{1}{3}u^2$$

g) Calcula el área del recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y la recta $y = x - 1$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Puntos de la parábola

$(-1; 0); (0; -1)$

$(0; 1)$

$(3; -2)\ y\ (3; 2)$

Puntos de la recta

$(0; -1)\ y\ (3; 2)$

El corte de la parábola se produce en:

$y = \sqrt{x+1} \qquad x = 0 \qquad x = 3$

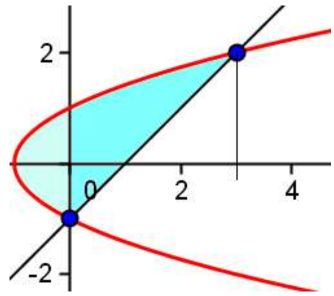


Figura. 4.28 Grafica de la función del ejercicio G

$$S = 2\int_{-1}^{0} (\sqrt{x+1})\, dx + \int_{0}^{3} \left(\sqrt{x+1} - X + 1\right) dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_{b}^{a} f x dx = F(a) - fF(b)$$

$$S = \left(\frac{4}{3}(x+1)\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(\frac{2}{3}(x+1)\right)\Big|_{0}^{3}$$

Integramos y evaluamos los límites de integración

$$S = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{9}{2} + 3 - \frac{2}{3}$$

$$S = \frac{9}{2}u^2$$

Solución

h) Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 1$

Puntos de la función $y = e^x$

$(-1; e^{-1})$ y $(1; e)$

El área de trapecio es $A_{TRAP} = \frac{(e^{-1}+e)*2}{2} = e^{-1} + e$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$A = \int_{-1}^{1} e^x dx$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - fF(b)$$

$A = (e^x)|_{-1}^{1}$

Integramos y evaluamos los límites de integración

$A = e - e^{-1}$
$A = 2e^{-1}u^2$

Solución

i) Halla el área de la región limitada por las curvas $y = \sin x$ e $y = \cos x$ y las rectas $x = \frac{\pi}{4}$ y x= $\frac{5\pi}{4}$

En el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$la curva del seno va por encima de la del coseno.

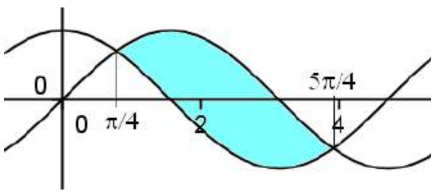


Figura. 4.29 Grafica de la función del ejercicio I

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\, dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx = F(a) - fF(b)$$

$$A = (-\cos x - \sin x)|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

Integramos y evaluamos los límites de integración

$$A = \cos\frac{5\pi}{4} - \sin\frac{5\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Solución

$$A = 2\sqrt{2}\, u^2$$

j) Dibuja el recinto finito del plano limitado por la recta $x = 1$, la parábola $y = x^2$ y la hipérbola $y = \frac{8}{x}$ .Calcular su área.

Puntos de la parábola $y = x^2$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$(0;0);(1;1);(2;4)$
Puntos de la hipérbola $y=\frac{8}{x}$
$(1;8);(2;4);(4;2);(8;1)$
Puntos de corte con la recta $x=1$ con las curvas:
En (1.1) con la parábola.
En $(1;8)$ con la hipérbola.

Cortes entre las curvas:

$$\begin{cases} y=x^2 \\ y=\dfrac{8}{x} \end{cases} \qquad x^2=\frac{8}{x} \qquad x^3=8 \qquad x=2$$

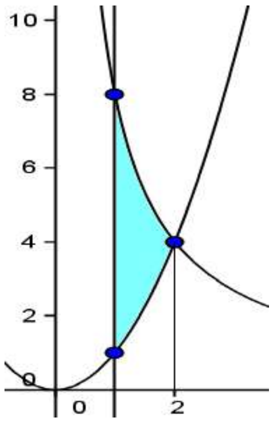


Figura. 4.30 Grafica de la función del ejercicio J

$$A=\int_1^2\left(\frac{8}{2}-x^2\right)dx$$

Formula de planteamiento

$$\int_b^a fxdx=F(a)-fF(b)$$

$$A=\left(8\ln x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2$$

Integramos y evaluamos los límites de integración

$$A=8\ln 2-\frac{8}{3}-\left(0-\frac{1}{3}\right)$$

$$A=8\ln 2-\frac{7}{3}u^2$$

Solución

k) Halla el área del recinto limitado por las curvas $y=e^{x+2}$, $y=e^{-x}$ y la recta $x=0$

Cortes de las curvas

ISBN: 978-631-6557-36-0

$e^{x+2} = e^{-x} \quad x = -1$

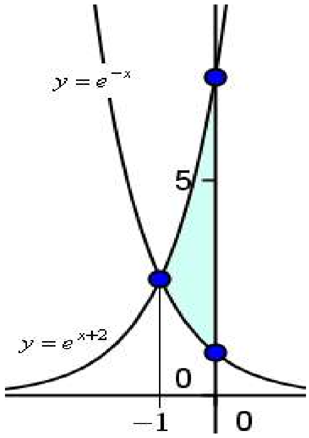


Figura. 4.31 Grafica de la función del ejercicio K

$A = \int_{-1}^{0} (e^{x+2} - e^{-x})\, dx$

Formula de planteamiento

$\int_{b}^{a} fxdx = F(a) - fF(b)$

$A = (e^{x+2} - e^{-x})|_{-1}^{0}$

Integramos y evaluamos los límites de integración

$A = e^{2} + e^{0} - e^{-1} - e^{1}$

$A = e^{2} - 2e + 1\ u^{2}$

Solución

4.18 EJERCICIOS PROPUESTOS DE ÁREA ENTRE CURVAS

a) $\boldsymbol{y = x^2; y = x + 2}$

b) $\boldsymbol{x = y^3; x^2 + y = 0}$

c) $\boldsymbol{y = 4x - x^2; y = x^2}$

d) $\boldsymbol{y^2 - 4x - 6y + 1 = 0; y = 2x + 3}$

e) $\boldsymbol{4x^2 - 17x - 15y + 30 = 0; y = \sqrt{x + 4}}$

f) $\boldsymbol{x^2 + y^2 = 18; x^2 = 6y - 9}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

g) $\boldsymbol{y^2 + x^2 = 25; y^2 - 8x + 8 = 0}$

h) $\boldsymbol{5x^2 + 16y^2 = 84; 4x^2 - y^2 = 12}$

i) $\boldsymbol{y = x^3; y = \frac{3x}{x+2}}$

j) $\boldsymbol{y^2 = x; xy^2 + 2x = 3}$

4.19 CONSTRUCCIÓN DE SOLIDOS DE REVOLUCIÓN

Los sólidos de revolución permiten calcular el volumen de objetos 3D simétricos generados al rotar una curva 2D alrededor de un eje, mediante integrales definidas, un sólido de revolución se forma al rotar una curva plana alrededor de un eje, con la que se obtiene una figura tridimensional (Marsden, & Hoffman, 2002).

Por ejemplo, rotar la curva de una función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ alrededor del eje X genera un sólido, cada sección transversal perpendicular al eje es un círculo de radio $f(x)$. Esto permite calcular el volumen del sólido mediante integrales, el volumen de revolución se calcula integrando el área de la sección transversal (área del círculo) sobre todo el intervalo $[a, b]$:

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 \, dx$$

Aplicando el método de discos (sumar volúmenes de cilindros), o el método de cascarones (sumar área de esferas).

Los sólidos de revolución tienen aplicaciones en geometría para calcular volúmenes de cilindros, conos, esferas, paraboloides, también son útiles en física para calcular volumen de tanques, capacidad de embalses, trabajo de fuerzas variables, momentos de inercia de cuerpos, y otras magnitudes, de manera que son muy útiles en geometría, física e ingeniería (Marsden, & Tromba, 2004).

ISBN: 978-631-6557-36-0

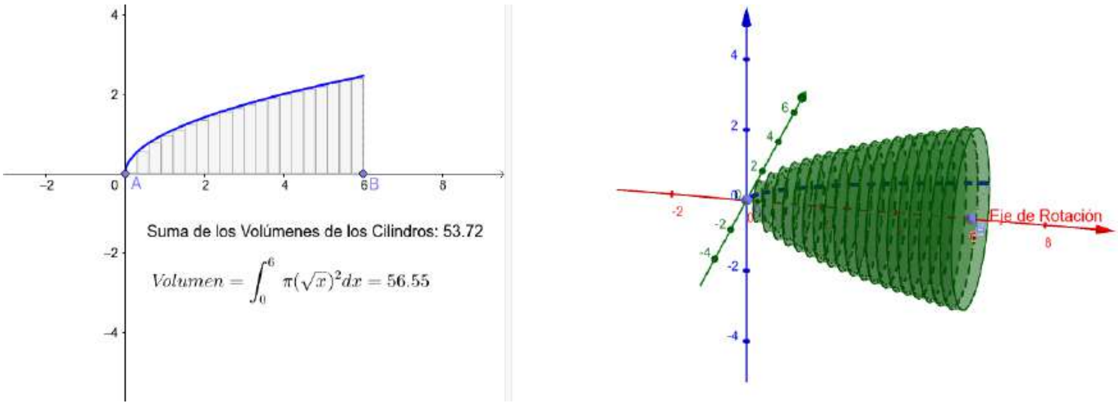


Figura. 4.32 Grafica de la función rotada como sólido de revolución

4.20 EJERCICIOS RESUELTOS DE SOLIDOS DE REVOLUCIÓN

Ejercicio 1

$36 - 4x^2 - 36 = 0 - 36$

$x = 3,\ x = -3$ Se encuentra x (límites de la integral)

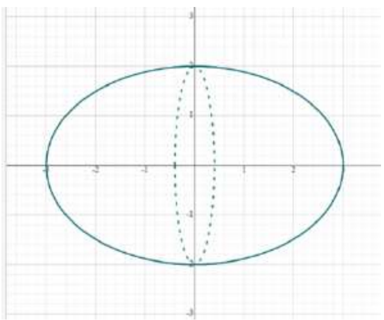
$$\int_{-3}^{3} \frac{\pi}{9}(36 - 4x^2)\,dx$$

Se reescribe la integral y se resuelve.

$= 8\pi - (-8\pi)$ Respuesta

$= 16\pi u^3$

Respuesta final.



Gráfica del problema

ISBN: 978-631-6557-36-0

Ejercicio 2

Calcular el volumen del solido de revolución engendrado por cada una de las regiones al girar alrededor del eje y

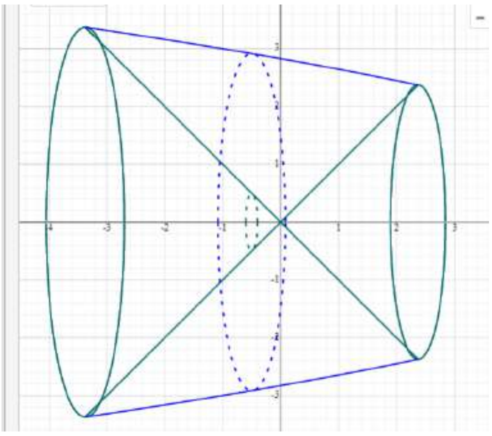
$\boldsymbol{y^2 \leq x \leq 8 - y^2}$ **Problema planteado**

$$= \int_a^b |(f(x))^2 - (g(x))^2 \pi| dx$$ Formula a usar

$$x + y^2 - x = 8 - x$$ Se encuentran los límites de la integral

$$= -\frac{5\sqrt{33}\pi}{2} + 8\sqrt{33}\pi$$ Respuesta

$$v = 99.25891u^3$$ Respuesta final



Gráfica del problema

Figura. 4.34 Gráfica del problema 2

Ejercicio 3

$\boldsymbol{y = x^2 \;\; y = 2x - 1 \; y = 4}$ Problema planteado

$$2\pi x \int_a^b |(f(x)) - f(x)$$ Formula a usar

$$\int_a^b (1 - 2x + x^2) dx$$ Integral a operar

ISBN: 978-631-6557-36-0

$= \frac{\pi}{6} = \quad 0.523599u^3$

Solución

Gráfica del problema

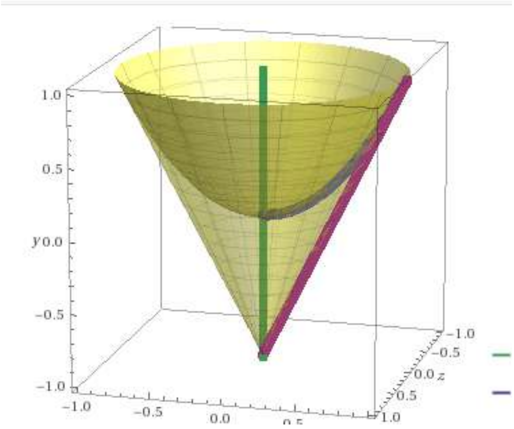


Figura. 4.35 Gráfica del problema 3

Ejercicio 4

$\boldsymbol{y = \sqrt{1 - x^2}\,,\; y = 1 - x}$

$\left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 = (1 - x)^2$

Se iguala las dos ecuaciones

$1 - x^2 = 1 - 2x + x^2$

Se resuelve los paréntesis

$x = 1,\; x = 0$

Se encuentra los límites de integración

$2\pi x \int_a^b |(f(x)) - f(x)$

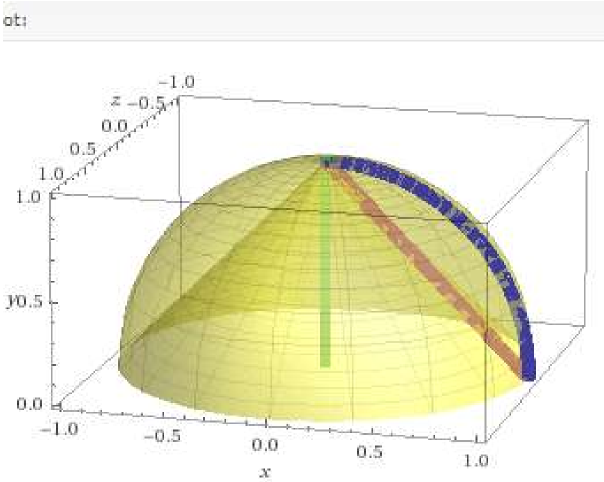
Formula a usar

$\int_0^1 2\pi x\left(-1 + x + sqrt(1 - x^2)\right)dx$
$= 1.0472u^3$

Se reescribe la integral y se resuelve

Respuesta

ISBN: 978-631-6557-36-0



Gráfica del problema

Figura. 4.36 Gráfica del problema 4

Ejercicio 5

Encuentre en volumen del solido generado por la rotación de la región R, limitada por las curvas dadas en torno al eje indicado.

$$\boldsymbol{y = \frac{x}{4}, x = 4, y = 0}$$

Problema planteado

$$\frac{x}{4} = 0$$

$$V = \pi\, |(f(x))^2 - (g(x))^2|$$

Formula a usar

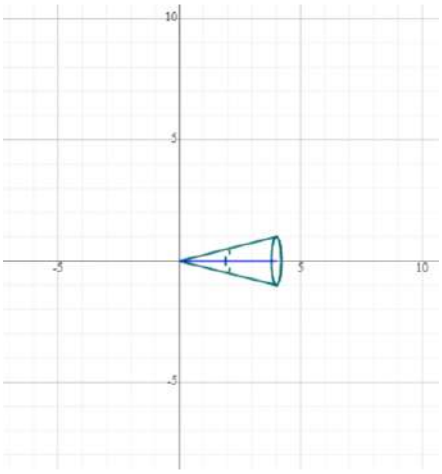
$$v = \int_0^4 \pi \left| \left(\frac{x}{4}\right)^2 - 0^2 \right| dx$$

Nueva integral y se resuelve.

$$= \frac{4\pi}{3} u^3$$

Respuesta

ISBN: 978-631-6557-36-0



Gráfica del problema

Figura. 4.37 Gráfica del problema 5

Ejercicio 6

$$\boldsymbol{y = x^2, : x = 2, : y = 0}$$

$$V = \int_a^b \pi \left|\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right| dx$$

Formula a usar

$$v = \int_0^2 \pi |(x^2)^2 - 0^2| dx$$

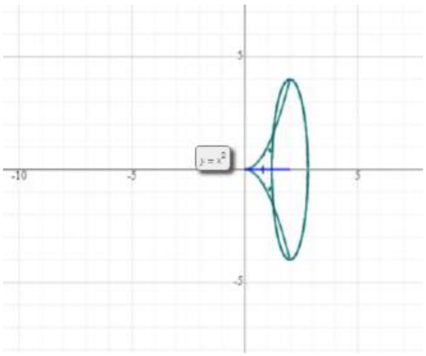
Integral a resolver

$$v = \int_0^2 \pi |x|^4 dx$$

Se resuelve la integral

$$= \frac{32\pi}{5}\, u^3$$

Respuesta



Gráfica del problema.

ISBN: 978-631-6557-36-0

Figura. 4.38 Gráfica del problema 6

Ejercicio 7

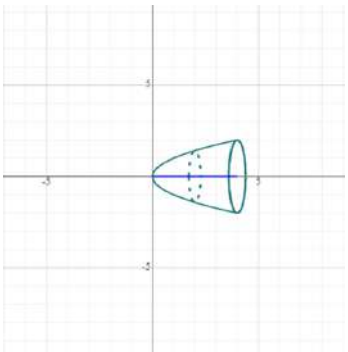
$$\boldsymbol{y = \sqrt{x},\ x = 4,\ y = 0}$$

$$V = \int_a^b \pi\,|(f(x))^2 - (g(x))^2|dx$$ Formula a usar

$$v = \int_0^4 \pi\left|(\sqrt{x})^2 - 0^2\right|dx$$ Integral a resolver

$$v = \int_0^4 \pi|x|dx$$ Se resuelve la integral

$$= \pi 8\ u^3$$ Respuesta



Gráfica del problema

Figura. 4.39 Gráfica del problema 7

Ejercicio 8

$$\boldsymbol{y = 4 - x^2, x \geq 0 \quad x = 0,\ y = 0}$$

$$V = \int_a^b \pi\,|(f(x))^2 - (g(x))^2|dx$$ Formula a usar

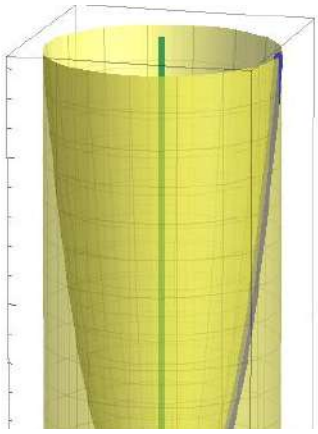
Integral a operar

$$v = \int_{-2}^{2} \pi|(4 - x^2)^2 - 0^2|\,dx$$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$= \pi \frac{512}{15} \quad u^3$$

Solución



Gráfica del problema

Figura. 4.40 Gráfica del problema 8

4.21 CALCULO DE VOLUMENES DE SOLIDOS DE REVOLUCION

Las integrales permiten calcular volúmenes de sólidos 3D generados al rotar curvas 2D, mediante aproximaciones de discos o cascarones cilíndricos infinitesimales16 (Burgos, 2007).

a) Método de discos:

Se divide el intervalo $[a, b]$ de la curva en rebanadas muy delgadas como discos. El volumen de cada disco es aproximadamente $\pi R^2 \Delta x$, donde R es el radio de la sección transversal y Δx el ancho del disco.
Sumando los volúmenes de todos los discos se obtiene el volumen total.
En el límite cuando $\Delta x \to 0$, esta suma se convierte en la integral:

$$V = \pi \int a^b \, [f(x)]^2 \, dx$$

b) Método de cascarones cilíndricos:

Se aproxima el sólido por cascarones cilíndricos huecos de espesor Δx.
El volumen de cada cascarón es $\pi(R_{exterior}^2 - R_{interior}^2)\Delta x$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Sumando e integrando los volúmenes de los cascarones resulta:

$$V = \pi \int a^b f(x) \cdot f'(x)\, dx$$

Recalcando, en ambos métodos se integra sobre todo el intervalo de x para obtener el volumen total del sólido de revolución.

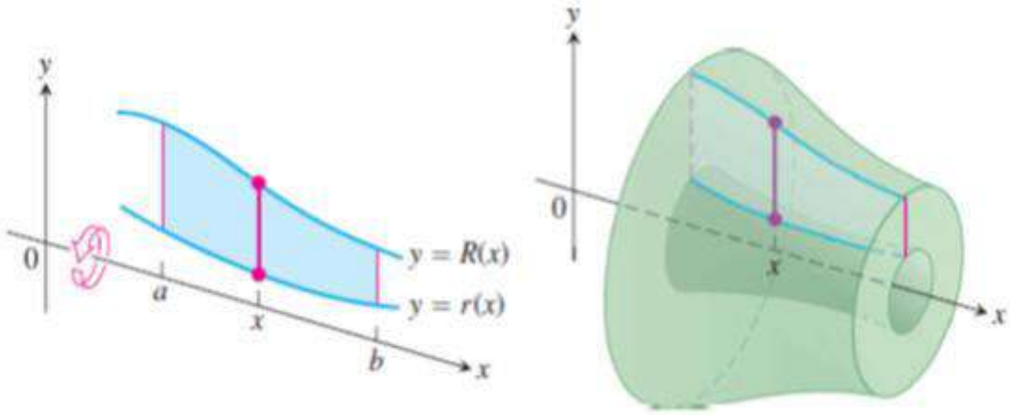


Figura. 4.41 Grafica de dos funciones rotadas como sólido de revolución hueco

4.22 METODO DE DISCOS

El método de discos consiste en aproximar el sólido de revolución por una pila de discos o rodajas perpendiculares al eje de rotación, se divide el intervalo de la curva original $[a, b]$ en n subintervalos de ancho Δx, en cada punto xi se traza un disco de radio $f(xi)$ perpendicular al eje. Esto genera n discos apilados (Marsden, & Hoffman, 2002).

El volumen de cada disco es aproximadamente $\pi[f(xi)]2\Delta x$, es decir el área de la cara circular por el espesor Δx y sumando los volúmenes de los n discos se obtiene una aproximación al volumen total del sólido.

En el límite cuando $n \rightarrow \infty\ y\ \Delta x \rightarrow 0$, la suma de discos converge al volumen real, esta suma se expresa como la integral definida de $\pi[f(x)]2$ sobre $[a, b]$, la integral acumula el área de las caras circulares de cada disco diferencial que forma el sólido.

Es un método intuitivo y fácil de visualizar muy útil para sólidos con eje de rotación horizontal y permite hallar el volumen del sólido conocida solo la función que describe la curva rotada (Castillo, 2005).

ISBN: 978-631-6557-36-0

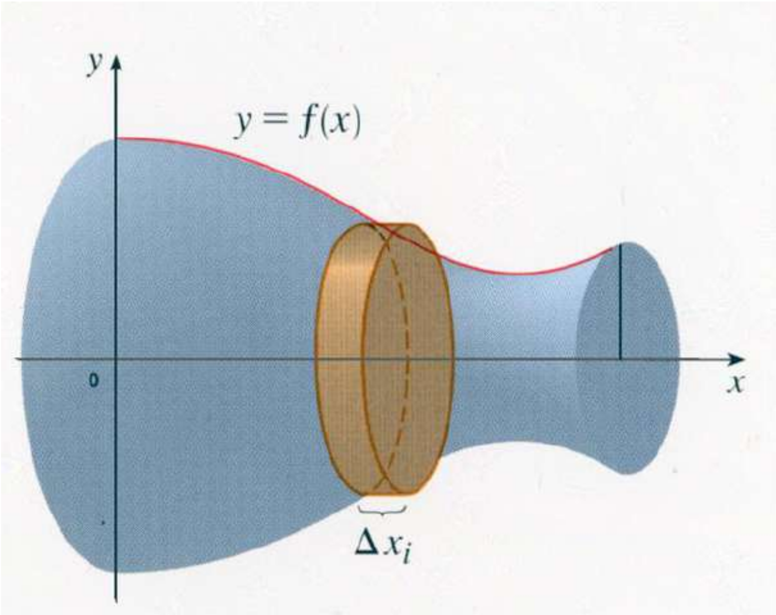


Figura. 4.42 Grafica del sólido de revolución y un disco interno

4.23 EJERCICIOS RESUELTOS POR METODOD DE DISCOS

a) Hallar el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, alrededor del eje OX, de la superficie limitada por el eje OX y la parábola $y = ax - x^2$ (a > 0).

$$v = \pi \int_0^a (ax - x^2)^2 \, dx$$

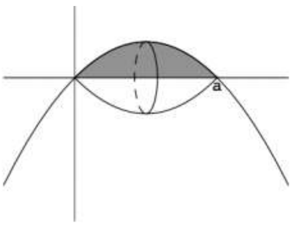
Utilizamos la formula

$$v = \pi \int_0^a (a^2x^2 + x^2 - 2ax^3) \, dx$$

Resolvemos el cuadrado de la función

$$v = \frac{\pi a^5}{30}$$

Obtenemos el volumen del sólido



Grafica del sólido rotado

ISBN: 978-631-6557-36-0

b) Calcular el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por la curva f(x) = sen x + cos x y el eje X en el intervalo [0, π] alrededor del eje X.

$$v = \pi \int_0^{\pi} (senx + cosx)^2\, dx$$

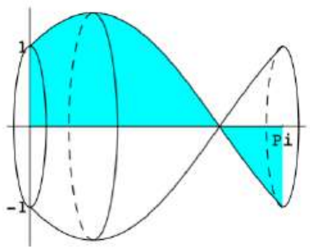
Aplicamos la formula a utilizar

$$v = 2\pi \left[x - \frac{1}{2}cos2x\right]$$

Resolvemos la integral y hacemos cálculo matemático

$$v = \pi^2$$

Resultado



Grafica del sólido

c) Se considera el área S de la región limitada por un cuadrante de una circunferencia de radio R y las tangentes en sus extremos. Hallar el volumen que engendra S cuando gira en torno a una de las tangentes.

Tomamos como eje OX el eje de giro y como eje OY la recta que, pasando por

el centro de la circunferencia es paralelo a la otra tangente. De este modo la ecuación de la circunferencia será

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

Analizamos el ejercicio

$$y = \sqrt{R^2 - x^2 - R}$$

Despejamos y

$$v = \pi \int_0^{R} y^2\,(x)\, dx$$

Aplicamos límites a la integral

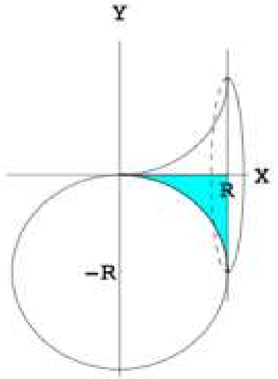
$$v = \int_0^{R} \left(\sqrt{R^2 - X^2 - R}\right)^2\, dx$$

Remplazamos y

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$v = \pi\left[2R^2x - \frac{x^3}{3} - R^3\, arc\ sen\ \frac{x}{R}\right]$$ Resolvemos la integral y el resultado de esta

$$v = \frac{\pi R^3}{6}\,(10 - 3\pi)$$ Volumen del sólido



Gráfica del problema

4.24 EJERCICIOS PROPUESTOS DE MÉTODO DE DISCO

a)$y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $x = -1$ $x = 1$ gira en X
b)$y = x^3$, $x = -2$ gira en X
c) $y =$ sen x $x = 0$ $x = \pi$ gira en x
d)$y = x - x^2$ gira en x
e) $y = x^2$, $x = 1$

4.25 METODO DE ARANDELAS

Las arandelas o cascarones cilíndricos utilizan integrales para aproximar y calcular el volumen total de un sólido de revolución por una pila de cascarones cilíndricos huecos apilados.

Se divide el intervalo de la curva $[a, b]$ en n subintervalos de ancho Δx, en cada punto xi se traza un cilindro de radio exterior $f(xi)$ y radio interior $f(xi - \Delta x)$, generando cascarones cilíndricos huecos apilados.

El volumen de cada cascada es aproximadamente igual al área lateral del cilindro por el espesor Δx:

ISBN: 978-631-6557-36-0

$$V = \pi(f(xi)^2 - f(xi - \Delta x)\text{^}2)\Delta x$$

Sumando los volúmenes de los n cascarones cilíndricos se obtiene una aproximación al volumen total, cuando $n \rightarrow \infty\, y\, \Delta x \rightarrow 0$, la suma converge al volumen real del sólido de revolución, esta suma se expresa como la integral definida $de\, \pi(f(x)^2 - f(x - \Delta x)^2)$ entre $a\, y\, b$.

Usando reglas de derivación, esto resulta en:

$$V = \pi \int ab\, f(x) \cdot f'(x)\, dx$$

Es un método útil cuando la curva original tiene eje de rotación vertical y permite calcular el volumen a partir de una ecuación de la frontera curvada (Másancho, 2003).

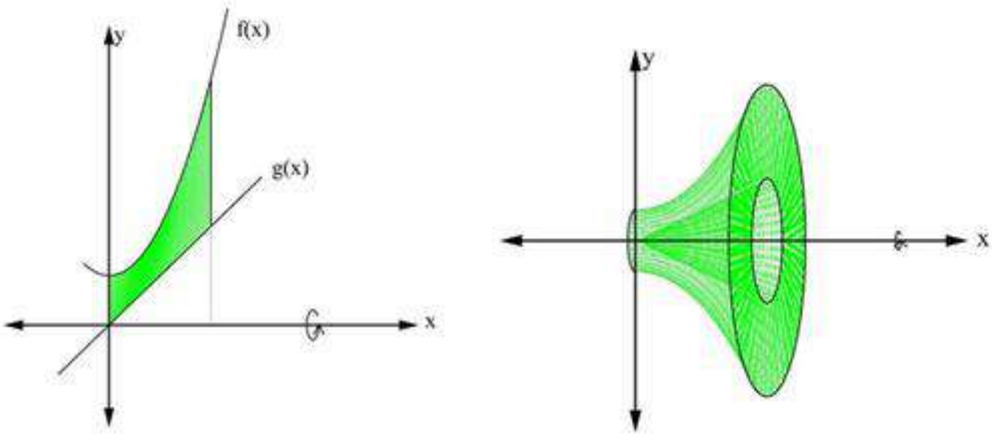


Figura. 4.43 Grafica de la función rotada como sólido de revolución

4.26 EJERCICIOS RESUELTOS DE METODO DE ARANDELAS

1. $\boldsymbol{y = 4 - x^2, y = 6 - 3x}$ **, gira en ex**

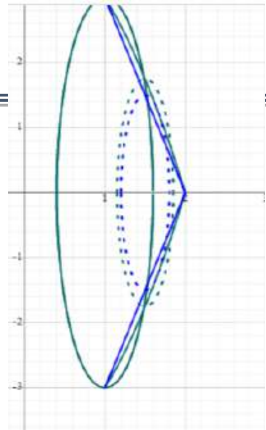
$$v = \int_a^b \pi\, |(f(x))^2 - (g(x))^2| dx$$

$$4 - x^2 = 6 - 3x$$

$$4 - x^2 + 3x = 6$$

$$v = \int_1^2 \pi((4 - x^2)^2 - (6 - 3x)^2)\, dx$$

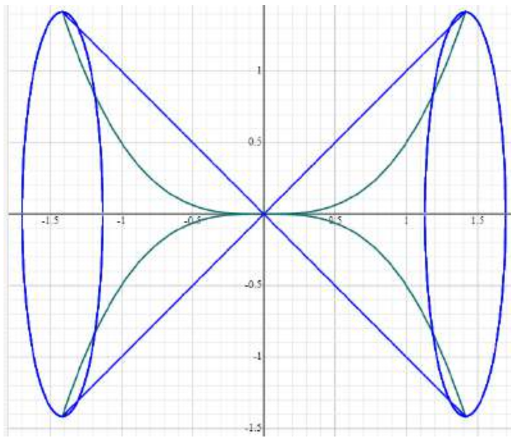
ISBN: 978-631-6557-36-0



$$v = \frac{8\pi}{15}\ u^3$$

2. $\boldsymbol{y = \frac{x^3}{2}, y = x}$ **, gira en ex**

$$V = \int_a^b \pi\,|\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2|dx$$

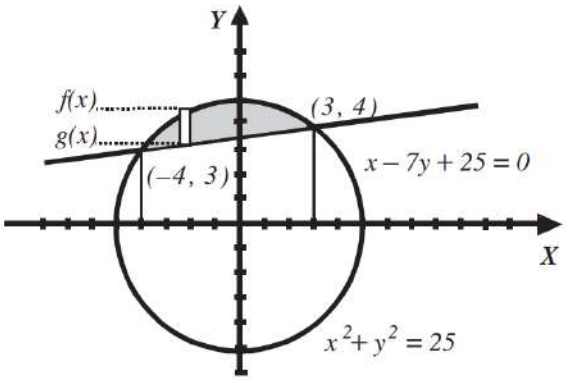


$$v = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi \left|\left(\frac{x^3}{2}\right)^2 - x^2\right| dx$$

$$v = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi \left|\frac{x^6}{4} - x^2\right| dx$$

$$v = \frac{16\sqrt{2}\pi}{21}\ u^3$$

3. Determina el volumen que se genera al girar el área limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $x - 7y + 25 = 0$ en torno al eje x.



Solución

Se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener los puntos de intersección,

$x^2 + y^2 = 25 \qquad x - 7y + 25 = 0$

$y = \pm\sqrt{25 - x^2} \qquad y = \frac{x+25}{7}$

ISBN: 978-631-6557-36-0

$\pm\sqrt{25-x^2}=\frac{x+25}{7}$

$\left(\pm\sqrt{25-x^2}\right)^2=\left(\frac{x+25}{7}\right)^2$

$x^2+x-12=0$

$(x+4)(x-3)=0$

Por consiguiente, las abscisas de los puntos son $x=-4$ y $x=3$, los cuales resultan ser los límites de integración. El eje de rotación no es parte del contorno de la superficie, por lo que se emplea la fórmula:

$$V=\pi\int_a^b([f(x)]^2-[g(x)]^2)dx$$

Donde f(x) es la circunferencia y g(x) la recta.

Al calcular el volumen se obtiene:

$$V=\pi\int_{-4}^{3}\left(\left[\pm\sqrt{25-x^2}\right]^2-\left[\frac{x+25}{7}\right]^2\right)dx$$

$$V=\pi\int_{-4}^{3}\left(25-x^2-\frac{x^2+50x+625}{49}\right)dx$$

$$V=\pi\int_{-4}^{3}\left(\frac{600-50x-50x^2}{49}\right)dx=\frac{50}{49}\pi\int_{-4}^{3}(12-x-x^2)\,dx$$

$$V=\frac{50}{49}\pi\left[12x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{-4}^{3}$$

$$V=\frac{50}{49}\pi=\left[\left(\left[12(3)-\frac{3^2}{2}-\frac{3^3}{3}\right]\right)-\left(12(-4)-\frac{(-4)^2}{2}-\frac{(-4)^3}{3}\right)\right]$$

Por consiguiente, se deduce que el volumen es igual a: $V=\frac{175}{3}\pi u^3$

4.27 EJERCICIOS PROPUESTOS DE MÉTODO DE ARANDELAS

a) $y=x^2,\ y=2x-1\ y=4$
b) $y=\sqrt{(1-x^2)}\quad y=1-x$
c) $y=e^x,\ y=e^{2x}\quad y=e^2$
d) $y=e^x,\ y=e^{2x}\quad x=1$
e) $y=x^3,\ y=1$
f) $y=\mathrm{x}-1\quad \mathrm{y}=\mathrm{x}-3\ \mathrm{y}=-1\ \ \mathrm{y}=$

ISBN: 978-631-6557-36-0

Bibliografía

Córdoba, A. (2011). Análisis matemático. Grupo Editorial Patria.

Larson, R. y Edwards, BH (2010). Cálculo (2da ed.). McGraw-Hill.

Purcell, EJ y Varberg, D. (2007). Cálculo (9na ed.). Pearson Educación.

Stewart, J. (2008). Cálculo de una variable: Trascendentes tempranas (6ta ed.). Aprendizaje Cengage.

Leithold, L. (1998). El cálculo (7ma ed.). Prensa de la Universidad de Oxford.

Marsden, E. y Tromba, AJ (2004). Cálculo vectorial (5ta ed.). Pearson Educación.

Bronceado, ST (2002). Matemática superior para ingeniería. Grupo Editorial Patria.

García, A. & López, A. (2015). Cálculo diferencial e integral. Editex.

Granville, WA (2003). Cálculo diferencial e integral. Limusa Noriega Editores.

Ayres, F. (2002). Ecuaciones diferenciales (2da ed.). McGraw-Hill.

Simmons, GF (1998). Ecuaciones diferenciales. McGraw-Hill.

Kincaid, D. y Cheney, W. (2006). Análisis numérico: las matemáticas del cálculo científico. Pearson Educación.

De Diego, JA (2015). 180 problemas de análisis matemático. Editorial Paraninfo.

Spiegel, señor (2009). Fórmulas y tablas de matemática aplicada (2da ed.). McGraw-Hill.

Castillo, E. (2005). Análisis matemático avanzado. Ediciones Pirámide.

Burgos, J. (2007). Cálculo infinitesimal de una variable. McGraw-Hill Interamericana.

Fleming, W. y Varberg, D. (1992). Cálculo con aplicaciones. Prentice Hall Hispanoamericana.

Álvarez, M. (2010). Introducción al análisis cálculo matemático. Netbiblo.

Más ancho, DV (2003). Análisis matemático avanzado. Reverté.F

Marsden, J. y Hoffman, M. (2002). Análisis clásico elemental. Addison Wesley.(s.f.).

ISBN: 978-631-6557-36-0

DE LOS AUTORES

José Luis Pérez Rojas

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones por la Universidad Nacional de Chimborazo y Máster Universitario en Ingeniería en Matemática y Computación por la Universidad Internacional de la Rioja. Actualmente, me desempeño como docente e investigador en la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo (ESPOCH) en Ecuador.

Mi labor académica e investigativa se centra en la presentación de ponencias a nivel nacional e internacional, cuyos resultados han sido publicados en diversos artículos científicos. Soy autor del libro "Métodos Numéricos para Ciencia en Ingeniería", una referencia en el campo de los métodos numéricos aplicados a la ingeniería. Actualmente, estoy cursando el primer año de Doctorado en Estadística Matemática Aplicada.

Mis intereses académicos y de investigación incluyen, pero no se limitan a, el desarrollo y aplicación de técnicas matemáticas avanzadas en la resolución de problemas de ingeniería y la enseñanza de estas disciplinas a nivel universitario.

ISBN: 978-631-6557-36-0

JUAN CARLOS SANTILLÁN LIMA

Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones (UNACH, 2012). Magíster en Redes de Comunicaciones (PUCE, 2015). Candidato a Doctor en Ciencias Informáticas (UNLP, Argentina). Magister en Estadística Aplicada (UPEC). Es becario SENESCYT. Fue parte del grupo de investigadores del Instituto ICITS de la UNACH. Docente de la UNACH 2013 hasta el 2016. En la UEB fue Docente Investigador y Administrador de la Red de Telecomunicaciones desde el 2016 hasta el 2019. Desde el 2019 es investigador doctoral del instituto LINTI de la UNLP-Argentina. Docente de la ESPOCH 2021 y desde el 2024 a la actualidad. Investigador externo de la ESPOCH 2023. Ha publicado más de 50 obras de relevancia a nivel nacional e internacional. Sus intereses de investigación son informática forense, preservación digital de datos, redes de comunicaciones, estadística aplicada y educación. Es revisor de varios congresos SCOPUS, así como también miembro del comité editorial de revistas Latindex 2.0 y editor en jefe de las editoriales "I2D Editorial" de Ecuador y "Puerto Madero Editorial Académica" y de "Tesla Revista Científica" de Argentina. Editor de más de 80 libros Académicos y de Investigación

ISBN: 978-631-6557-36-0

Diego Iván Santillán-Espinoza

Ingeniero Industrial, Escuela Superior Politécnica del Chimborazo.

Magíster en Matemática, Mención Modelación y Docencia, Escuela Superior Politécnica del Chimborazo.

Magíster en Seguridad Industrial, Mención Prevención de Riesgos y Salud Ocupacional, Universidad Nacional del Chimborazo.

Docente en la Escuela Superior Politécnica del Chimborazo – Ecuador.

Dirección: Panamericana Sur km 1 1/2, Riobamba-Ecuador. Teléfono: 593 (3) 2998-200. E-mail: ivan.santillan@espoch.edu.ec

Código ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4213-1936.

PUERTO MADERO EDITORIAL

ISBN 978-631-6557-36-0

9 786316 557360